

Nemzeti
Közzszolgálati
Egyetem
Vízstudományi Kar

Kutassy Emese

GEODÉZIAI ALAPISMERETEK I.



SZÉCHENYI 



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Geodéziai alapismeretek I.

VÁKÁT OLDAL

Kutassy Emese

Geodéziai alapismeretek I.



LUDOVIKA
EGYETEMI KIADÓ

Budapest, 2021

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap (ESZA) társfinanszírozásával valósul meg
(a támogatási szerződés száma: EFOP-3.4.3-16-2016-00003, a projekt címe: Stratégiai oktatási kompetenciák
minőségének fejlesztése a felsőoktatásban, a megváltozott gazdasági és környezeti feltételekhez történő adaptációhoz
és a képzési elemek hozzáférhetőségének javításáért).

Szerző
Kutassy Emese

Szakmai lektor
Dr. Takács Bence Géza

Kiadja a Nemzeti Közszerzői Egyetem
Ludovika Egyetemi Kiadó Iroda
A kiadásért felel: Koltay András rektor

Székhely: 1083 Budapest, Ludovika tér 2.
Kapcsolat: kiadvanyok@uni-nke.hu

Felelős szerkesztő: Karácsony Fanni
Olvasószerkesztő: Szabó Ilse
Korrektor: Bíró Csilla
Tördelőszerkesztő: Stubnya Tibor

DOI: https://doi.org/10.36250/00889_00

ISBN 978-963-531-510-9 (nyomtatott)
ISBN 978-963-531-443-0 (elektronikus PDF) | ISBN 978-963-531-444-7 (ePub)

© A szerző, 2021
© A kiadó, 2021

Minden jog védve.

Tartalom

Előszó	9
1. Földrajzi helymeghatározás	11
1.1. A geodézia feladata, felosztása	11
1.2. A földrajzi helymeghatározás alapelve	12
1.3. A függővonal, szintfelület, a Föld elméleti alakja	13
1.4. A középengerszint	15
1.5. A geoid szabályos közelítő felületei	15
1.6. Abszolút és relatív helymeghatározás	17
1.6.1. A térbeli relatív helymeghatározásra irányuló mérésről általában	19
1.7. Mértékegységek	19
1.7.1. A hossz mértékegységei	19
1.7.2. A szög mértékegységei	20
1.7.3. A terület mértékegysége	21
1.7.4. A tömeg mértékegysége	21
1.7.5. Az idő mértékegysége	22
1.7.6. A hőmérséklet mértékegysége	22
1.7.7. Régi mértékegységek	22
2. A mérési hibák	23
2.1. A mérési hibák és csoportosításuk	23
2.1.1. Durva hiba	23
2.1.2. Álhiba	23
2.1.3. Szabályos hibák	24
2.1.4. Szabálytalan (véletlen) hiba	24
2.1.5. A valódi hiba	25
2.2. A hibák kiküszöbölésének lehetőségei	25
2.3. Mérési eredményeink minősítése	25
2.4. Hibaterjedés	29
3. A mérés alapműveletei	31
3.1. Pontértelmezés	31
3.2. Pontjelölések	31
3.2.1. Alappontok állandósítása	32
3.2.2. Vízszintes pontjelek	32
3.2.3. Magassági pontjelek	35
3.2.4. Háromdimenziós pontjelölések	37
3.2.5. Részletpontok állandósítása	38
3.2.6. Ideiglenes pontjelölések	38
3.3. Pontleírás	39
4. Szögmérés	41
4.1. A vízszintes szögmérésről általában	41
4.2. A teodolit	41

6.4.5. A szintezés hibaforrásai és kiküszöbölési módjai	90
6.4.5.1. A szintfelület görbültségének hatása	90
6.4.5.2. A talajközeli refrakció hatása	92
6.4.5.3. Az alapírányvonal igazítási hibájának hatása	93
6.4.5.4. A műszersüllyedés hatása	94
6.4.5.5. A szintezőlécek hibái	96
6.4.5.6. A szintezőlécek ferdeségének hatása	97
6.4.5.7. A lécsüllyedés hatása	98
6.4.6. A szintezés gyakorlati szabályai	98
6.5. Trigonometriai magasságmérés	98
6.5.1. Alapelve	98
6.5.2. Magassági szög, zenitszög	100
6.5.3. A mérés végrehajtása	100
6.5.4. Számítás	101
7. Síkgeometria	105
7.1. Alapfogalmak	105
7.2. Koordinátatranszformálás	108
7.3. Geodéziai számítások alapfeladatai	110
7.3.1. A geodézia első alapfeladata – Koordinátaszámítás irányszögből és távolságból	110
7.3.2. A geodézia második alapfeladata – Irányszög és távolság számítása koordinátákból	111
8. A részletpont-meghatározás módszerei	115
8.1. Derékszögű koordinátamérés	115
8.1.1. Derékszögű koordinátamérés végrehajtása	116
8.1.2. A bemért pontok koordinátáinak számítása	117
8.2. Poláris koordinátamérés	121
8.2.1. Polárisan bemért részletpontok koordinátáinak számítása	121
9. Vetületi ismeretek	123
9.1. A vetítés	123
9.2. A vetítés során fellépő torzulások	124
9.3. A Magyarországon használt vetületi rendszerek	126
9.3.1. Sztereografikus vetületi rendszer	126
9.3.2. Hengervetület	127
9.3.3. Egységes országos vetület	128
9.3.4. Gauss–Krüger-vetület	129
9.3.5. UTM-vetület	130
10. Területmeghatározás	133
10.1. A területmeghatározás módszerei	133
10.2. Területszámítás	133
10.2.1. Egyszerű idomok	133
Ajánlott irodalom	137
Ábrák forrása	139

VÁKÁT OLDAL

Előszó

A *Geodéziai alapismeretek I.* tankönyv célja, hogy a geodéziában használatos fogalmakkal, alapvető geodéziai mérésekkel, mérési eljárásokkal és a mérésekhez használt eszközökkel megismertesse az olvasót.

A tankönyv tárgyalja az alapfogalmakat, a méréseket terhelő hibákat, a vízszintes és magassági meghatározásokhoz szükséges mérési eszközöket, technológiákat és eljárásokat. Bevezet a geodéziai számítások alapjaiba, a részletpont-meghatározási módszerekbe, bemutatja a Magyarországon használatos vetületi rendszereket, és megismertet a területszámítás alapjaival.

A tankönyv elsősorban a Nemzeti Közszolgálati Egyetem Víztudományi Karán zajló vízügyi üzemeltető mérnök alapképzés oktatási anyagául szolgál. A tananyag feltételez matematikai és fizikai alapismereteket, amelyek nélkül a tananyag megértése és elsajátítása nehézségekbe ütközhet. A témakörök részben egymásra épülnek, ezért javasolt a sorrendiség betartása az ismeretek elsajátítása érdekében.

A tananyag elkészítése során törekedtem arra, hogy egy féléves kurzus keretében átadható ismeretanyagot csak olyan részletességgel tárgyaljak, ami egy leendő „vizes” mérnök számára hasznos és érthető. Az alaposabb és részletesebb ismeretek elsajátításához a bibliográfiában felsorolt szakirodalmakat ajánlom.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Zsóri Andrea és Bencze Krisztián hallgatóknak, demonstrátoroknak, akik az ábrák megszerkesztésében segítségemre voltak.

Baja, 2020. január

A szerző

VÁKÁT OLDAL

1. Földrajzi helymeghatározás

A „geodézia” szó magyarul földosztást jelent, maga a szó Arisztotelésztől ered. A magyar jelentés nem fejezi ki a tudományág lényegét. A földosztás a geodéziának csak egy kis része. Korábban geometriának (földmérésnek) hívták, de ma a geometria az elvont mértant jelenti. Nevezték földméréstannak is, de e fogalom sem tükrözi teljesen a geodézia célját és feladatát. Pontos magyar megfelelő hiányában ma is általában a „geodézia” kifejezést használjuk.

1.1. A geodézia feladata, felosztása

A geodézia feladatát két részre oszthatjuk, tudományos és gyakorlati részre. Elméleti feladata: a Föld – mint égitest – alakjának, méreteinek és nehézségi erőterének meghatározása, és a földfelszínen végrehajtandó helymeghatározás elméleti megalapozása. Gyakorlati feladata: a földfelszínen vagy annak közelében lévő természetes alakzatok és mesterséges létesítmények adatainak meghatározása (felmérés), ezek alapján az alakzatok és létesítmények mérethelyes ábrázolása (térképezés), illetve a tervezett létesítmények kijelölése a természetben (kitűzés).

A geodézia másik szokásos felosztása a felsőgeodézia és alsógeodézia szerinti csoportosítás.

A *felsőgeodézia* feladata a Föld alakjának, méreteinek elméleti és gyakorlati meghatározása, a földi pontok abszolút helymeghatározása és a megfelelő alap szolgáltatása a Föld egy nagyobb darabjának (ország, földrész) felméréséhez.

Az *alsógeodézia* a földi pontok egymáshoz viszonyított helyét (relatív) határozza meg. Ismerteti a relatív helymeghatározáshoz szükséges mérési módszereket, műszereket és mérési eljárásokat.

A *távérzékelés* és ezen belül is a fotogrammetria sajátos eszközökkel old meg geodéziai feladatokat, ezért a geodézia szerves részének tekintjük. Elmélete, műszerei, gyakorlati módszerei a klasszikus geodéziától eltérő ismeretanyagot igényelnek, ezért gyakorlati szempontból külön tudományként tartjuk számon.

A *kartográfia* tárgyalja a geodéziai mérésekkel és számításokkal nyert információk grafikus ábrázolásának törvényszerűségeit. E tudomány átmenetet képez a geodéziai tudományok és a földrajzi tudományok között.

A *vetülettan* azon matematikai törvényszerűségeknél foglalkozik, amelyek segítségével a Földet helyettesítő matematikai felületeken meghatározott pontokat síkba fejthető felületre transzformáljuk.

A *kozmosz geodézia* a mesterséges holdak segítségével történő földi helymeghatározással foglalkozik.

Az *ipari geodézia* foglalja magában mindazokat a geodéziai tevékenységeket, amelyek az ipar vagy mezőgazdaság egy-egy területén új létesítmény tervezéséhez, építéséhez, üzemeléséhez vagy meglévő létesítmény bővítéséhez, mozgásvizsgálatához, rekonstrukciójához szükségesek. Mindazokat az eredményeket felhasználja, amelyeket a felső- és alsógeodézia elért, alkalmazza azok módszereit, műszereit, számítási eljárásait, de speciális feladatának és a speciális mérési körülményeknek megfelelően továbbfejleszti azokat.

A vízepítő szakembereknek az alsógeodéziával és az ipari geodéziának azon területeivel kell megismerkedniük, amelyek a vízügyi létesítmények tervezéséhez, építéséhez és üzemeléséhez

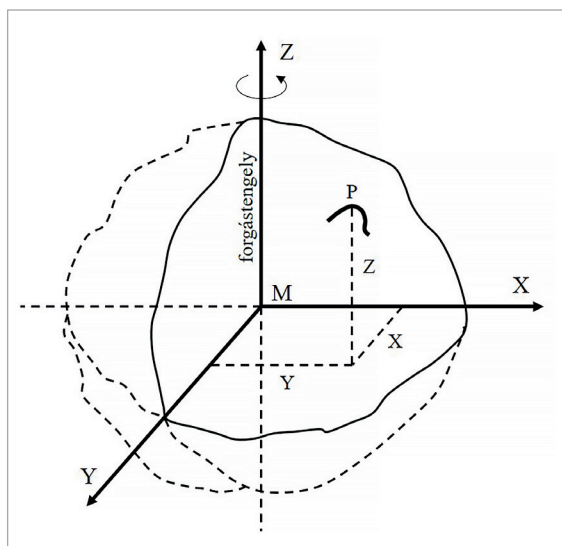
szükségesek. Ezeket öleli fel a Geodézia I. és Geodézia II. tantárgy. A felsőgeodéziát csak olyan mértékig tárgyaljuk, amennyi az alsógeodézia és az ipari geodézia megértéséhez szükséges.

1.2. A földrajzi helymeghatározás alapelve

A Föld valóságos (fizikai) alakját a szárazföldek és a tengerek felszíne által alkotott felület határozza meg. A Föld matematikai (elméleti) alakját pedig a szabad folyadékfelszín egyensúlyi alakja, amennyiben a folyadékokra csupán a nehézségi erő hat.

Valamely felület meghatározásának egyik módja, ha a felületet megfelelően kiválasztott és összekapcsolt pontok hálózatával helyettesítjük. Ez a módszer mindkét földalak meghatározására alkalmas: a terepen megjelölt ponthálózat a valóságos földalakat, a pontok tengerszintre vetített képe az elméleti földalakat jelenti.

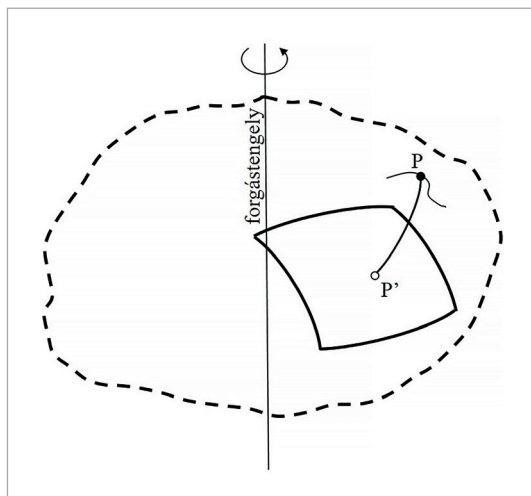
Az alsógeodéziában a Föld felületén található természetes és mesterséges alakzatok geometriai adatait úgy is meghatározhatjuk, ha ezeknek az alakzatoknak meghatározzuk az alakjelző pontjainak koordinátáit. Ehhez vegyünk fel egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek középpontja a Föld tömegközéppontjában van, egyik tengelye a Föld forgástengelyébe, a másik kettő pedig erre merőleges síkba esik (1.1. ábra).



1.1. ábra: Földi derékszögű koordináta-rendszer (a szerző szerkesztése)

Egy ilyen értékhármassal nem ad szemléletes képet annak az embernek, aki a Föld fizikai felszínén tevékenykedik, azonban ez az értékhármassal igen jól alkalmazható a kozmikus geodéziában. A gyakorlatban minket az érdekel, hogy a felszíni idomok a Föld felületén hol, vagy egymáshoz viszonyítva hol helyezkednek el, továbbá hogy a fizikai felszín kiemelkedései és bemélyedései mekkorák.

A földi pontok helyzetének meghatározásához felvesszünk egy, a fizikai földfelszínhez jól simuló felületet alapfelületnek és egy vonalat vetítővonalnak (1.2. ábra).



1.2. ábra: Alapfelület és vetítővonal (a szerző szerkesztése)

A helymeghatározás úgy történik, hogy az egyes földi (terepi) pontokat (P) a választott vetítővonallal levetítjük a kiválasztott alapfelületre (P'). Meghatározzuk egyrészt a P' vetületi pont helyét az alapfelületen (ehhez két adat kell), másrészt az eredeti földi pont (P) távolságát a vetületi ponttól (P') a vetítővonalon mérve (egy adat).

Azokat a méréseket, amelyekkel P' vetületi pont helyét meghatározzuk az alapfelületen, vízszintes mérésnek nevezzük. Azokat a méréseket pedig, amelyekkel a P' és P pontok távolságát határozzuk meg, magasságmérésnek nevezzük.

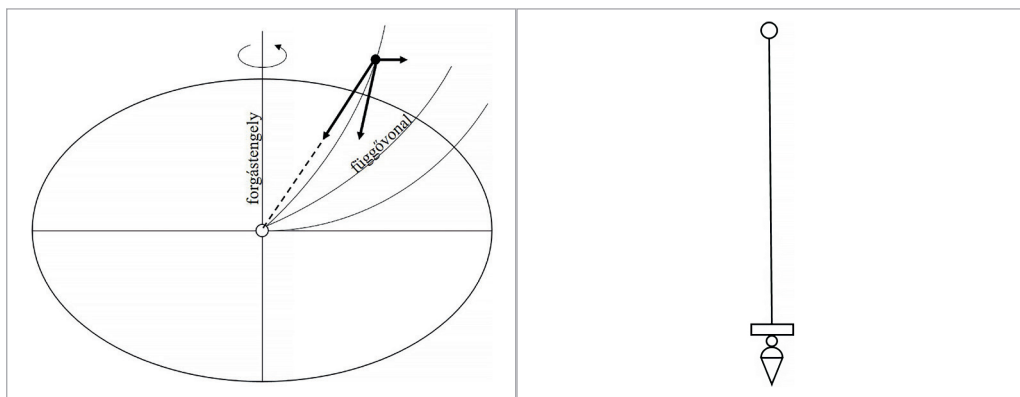
A földi helymeghatározás során célszerű olyan vetítővonalat és alapfelületet választani, amelyet a természet maga jelöl ki. A geodéziában vetítővonalnak a függővonalat, a nehézségi erőter erővonalait választjuk.

A szintfelületet a természet jelöli ki, hiszen a nehézségi erő hatására jön létre, mivel minden pontjában merőleges a nehézségi erő vonalára, azonban matematikai egyenletekkel nem jellemezhető. Alapfelületül olyan matematikailag kezelhető felületet választunk, ami jól simul a Föld elméleti alakjához. Ilyen felület a forgási ellipszoid.

1.3. A függővonal, szintfelület, a Föld elméleti alakja

A függővonal a nehézségi erőter erővonala. A nehézségi erő – jó közelítésben – a földi tömegvonzásból (Newton-féle tömegvonzás) és a Föld tengely körüli forgásából (centrifugális erő) származó két erő eredője.

A Föld tömegvonzásának iránya a Föld tömegközéppontja felé mutat, nagysága pedig a tömegközépponttól mért távolság négyzetével fordítottan arányos. A Föld forgásából származó centrifugális erő iránya pedig merőleges a Föld forgástengelyére, nagysága egyenesen arányos a forgástengelytől mért távolsággal (1.3. ábra).



1.3. ábra: Függővonal (a szerző szerkesztése)

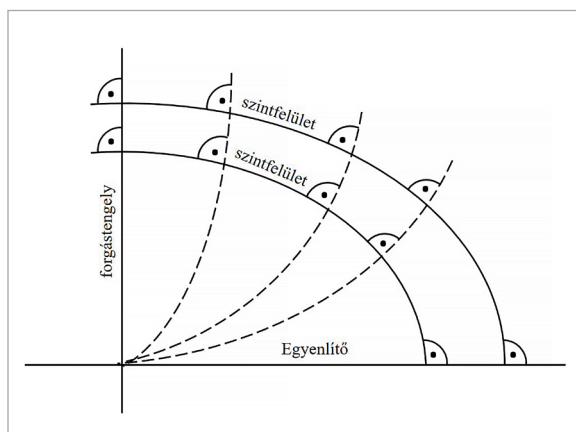
1.4. ábra: Függő (a szerző szerkesztése)

A függővonal érintőjét valamely pontban az érintési pont függőleges egyenesének, röviden függőlegesének nevezzük. A gyakorlati geodéziában a függővonal néhány kilométer hosszú szakaszát legtöbbször egyenesnek vehetjük, és függőlegessel helyettesíthetjük.

A függőleges egyenes egy szakasza a Föld fizikai felszínén bármely pontban előállítható, például függővel (1.4. ábra).

Azokat a felületeket, ahol a nehézségi erő munkavégző képessége (potenciálja) állandó, szintfelületeknek nevezzük. Az ilyen felületen egy tömegpontot mozgatva a nehézségi erővel kapcsolatos munkavégzés nincs. A nehézségi erő potenciálja jellemezhető azzal a munkával, amelyet a nehézségi erő végez, ha egy tömeget egyik pontból a másikba kívánunk eljuttatni.

A szintfelületek jellemző tulajdonsága, hogy minden pontjukban merőlegesek a pontbeli nehézségi erő irányára, tehát a függővonalra (1.5. ábra).

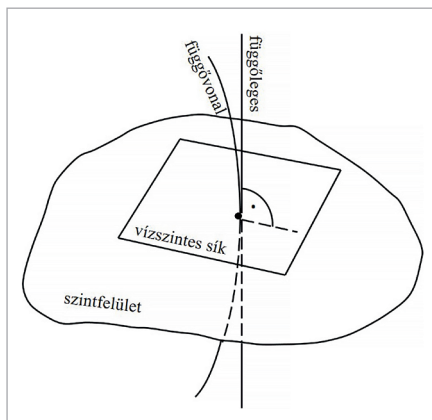


1.5. ábra: Szintfelületek (a szerző szerkesztése)

A szintfelületek véges darabjai a Föld fizikai felszínén bárhol és bármikor előállíthatók. A nyugalomban lévő szabad folyadékfelszín szintfelületet jelöl ki, ha a folyadékra csupán a nehézségi erő hat. (A Föld elméleti alakját így definiáltuk.)

A szintfelület érintősíkja az érintési pont vízszintes síkja, ami merőleges az érintési pont függővonalára és a függőleges egyenesére is (1.6. ábra).

A vízszintes sík csak az érintési pontban vízszintes. A szintfelületek nem párhuzamosak egymással, hanem a sarkok felé összetartanak.



1.6. ábra: Szintfelület érintő síkja (a szerző szerkesztése)

1.4. A középtengerszint

A földi nehézségi erő potenciáljának végtelen sok szintfelülete van. Közülük azt, amely valamely középtengerszint magasságában helyezkedik el (Listing 1878 javaslatára külön elnevezéssel), geoidnak nevezzük. A geoid alakját tekintjük a Föld elméleti alakjának. Mivel az egyes tengerek középszintje nincs ugyanazon a szintfelületen, több geoid létezik, köztük az eltérés deciméter nagyságrendű.

A fentiek miatt, és mert a tengerek sohasem kerülnek nyugalomba, az egész Föld vonatkozásában nem lehetséges olyan egységes alapszint alkalmazása, amelyet egyértelműen a természet jelöl ki. Ezért minden ország geodéziai méréseiben a maga középtengerszintjének, vagy ha nincs tengerpartja, általában valamelyik szomszédos tengerparttal rendelkező ország középtengerszint-magasságában lévő geoidot választja alapszintnek. Ehhez a középtengerszint magasságában definiált felülethez képest mérjük az abszolút magasságokat.

Magyarországon az idők folyamán két alapszint alakult ki, az egyik az Adriai-tengernek Triesztben kijelölt középtengerszint-magasságában, a másik pedig a Balti-tenger Kronstadtban mért középtengerszintjének magasságában helyezkedik el.

1.5. A geoid szabályos közelítő felületei

A földi pontok természetes vetületének helyét az alapfelületen a gyakorlati geodéziában mérésekkel határozzuk meg. Ez magán az alapfelületen végzett geometriai számításokat is igényel. A geoid felülete igen bonyolult felület, ezért egy matematikai felülettel helyettesítjük, hogy a felületi koordináták kiszámíthatók legyenek. A kiválasztott alapfelületnek jól kell közelítenie a geoidot, hogy a helyettesítéssel járó hibák minél kisebbek legyenek. Erre – a kutatások szerint – legalkalmasabb

egy forgási ellipszoid, amelynek nagyságát és alakját, illetve az elhelyezkedését úgy választjuk meg, hogy az ellipszoid a legjobban simuljon a geoidhoz.

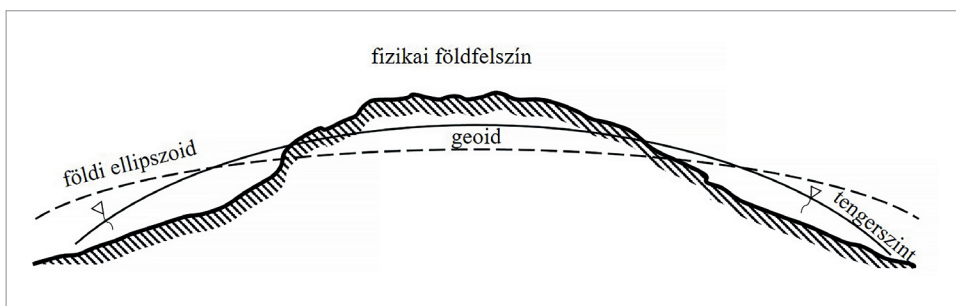
Valamely forgási ellipszoidot úgy kapunk, hogy egy ellipszist kistengelye körül megforgatunk. Az ellipszist két paramétere – fél nagytengelye (a) és fél kistengelye (b) – egyértelműen meghatározza. Gyakran a fél nagytengely mellett a lapultságot ($\alpha = \frac{a-b}{a}$) adják meg.

Az alábbi táblázatban feltüntetjük a legfontosabb földi ellipszoidok méreteit.

1.1. táblázat: A földi ellipszoidok méretei (a szerző szerkesztése)

	Fél nagytengely (a)	Fél kistengely (b)	Lapultság (α)
Bessel-féle (1841)	6 377 397	6 356 079	1:299,15
Hayford (1924)	6 379 388	6 356 912	1:297,0
Kraszovszkij (1946)	6 378 245	6 356 863	1:298,3
IUGG (1967)	6 378 160	6 356 775	1:298,25
GRS 80	6 378 137	6 356 752	1:298,257
WGS 84	6 378 137	6 356 752,3	1:298,257

Az 1.7. ábra mutatja a geoidnak és az azt helyettesítő földi ellipszoidnak az egymáshoz viszonyított (relatív) elhelyezkedését.



1.7. ábra: A geoid és a földi ellipszoid helyzete (a szerző szerkesztése)

A geoid és a földi ellipszoid közötti maximális sugárirányú eltérés mintegy 50 m, így tetszőleges nagyságú területek (országok, kontinensek, sőt az egész földfelület) felmérésekor a gyakorlati geodéziában forgási ellipszoidokkal helyettesíthetjük a geoidot. Mivel a geoidot helyettesítő forgási ellipszoidok lapultsága igen kicsiny (lásd 1. táblázat), további közelítéssel a geoidot földgömbbel is helyettesíthetjük. A földi ellipszoid és a földgömb közötti maximális sugárirányú eltérés azonban már elég nagy, meghaladja a ± 10 km-t. Azonban a gyakorlati geodéziában a geoidot földgömbbel helyettesíthetjük akkor, ha a felméréendő terület egy 13 km sugarú körön belül helyezkedik el. A függőleges vonalak ilyenkor gömbsugaraknak tekinthetők, általában 6 378 km-es gömbsugarral számolunk.

Amennyiben nem az egész geoid, hanem csak egy kis felületdarab helyettesítéséről van szó, akkor a geoid ezen kicsi darabját vízszintes síkkal is helyettesíthetjük. A gyakorlati geodéziában vízszintes síkkal akkor helyettesítünk, ha a felméréendő terület egy 4 km-es sugarú körön belül van. Ekkor a függőleges vonalakat párhuzamosoknak tekintjük. A vízszintes sík és a geoid

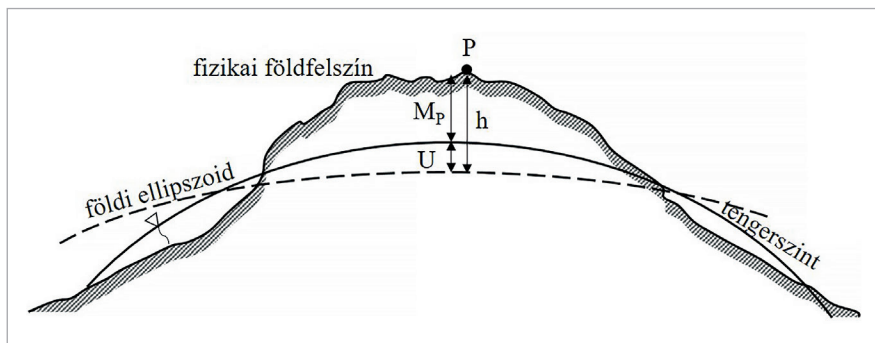
normális távolsága az érintési ponttól mért távolság négyzetével arányos. Értéke 1 km-re mintegy 8 cm, 4 km-re mintegy 1,3 méter.

A fent említett helyettesítések csak a vízszintes mérésnél, a P' vetületi pont alapfelületen való helyének meghatározásakor alkalmazhatók (1.2. ábra). A magasságmérésnél a geoidnak semmiféle helyettesítése nem engedhető meg.

A gyakorlati geodéziában a földi pontok helymeghatározásánál a vízszintes mérések és a magasságmérések alapfelülete végeredményben, ha kismértékben is, de elválik egymástól. A geodéziai gyakorlatban a különleges esetektől eltekintve az alapfelületek előbb említett szétválasztását figyelmen kívül hagyhatjuk.

Az alapfelületi koordinátákat a geoidhoz (tengerszinthez) simulás miatt vízszintes koordinátáknak nevezzük, a harmadik koordinátát pedig az ellipszoid feletti magasságnak.

Az ellipszoid feletti magasság meghatározása a legutóbbi időkig két különálló feladatot jelentett. Az ellipszoid feletti magasság (h) két magasságrész összege: a geoid-ellipszoid távolságnak (U – *unduláció*, amelynek meghatározása az elméleti geodézia feladata) és a pont geoid (tengerszint) feletti magasságának (M_P) az összege (1.8. ábra). A műholdas helymeghatározás lehetővé tette az ellipszoid feletti magasság közvetlen meghatározását.

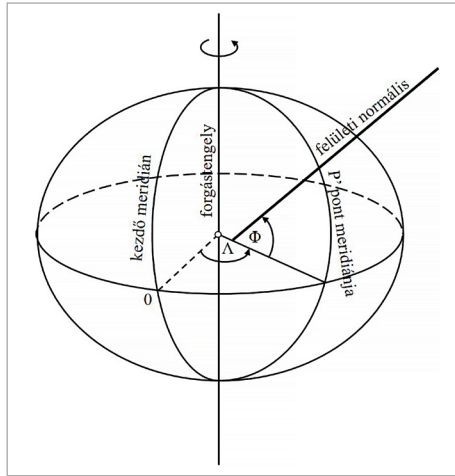


1.8. ábra: A pont magassága (a szerző szerkesztése)

1.6. Abszolút és relatív helymeghatározás

Abszolút helymeghatározásról beszélünk, ha a földi pontok helyzetét a földi globális derékszögű (X, Y, Z) koordináta-rendszerekben (1.1. ábra) adjuk meg. Ilyen lehetőséget biztosítanak a globális helymeghatározó műholdrendszerek.

Ha egy földi pontnak a helymeghatározó adatait a Föld forgástengelyéhez, egy nemzetközileg elfogadott kezdő meridiánhoz (jelenleg a greenwichi kezdő meridiánhoz) és valamely közép-tengerszint magasságában felvett geoidhoz viszonyítva határozzák meg, akkor is abszolút helymeghatározásról beszélünk (1.9. ábra).

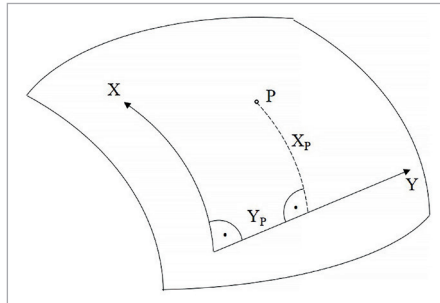


1.9. ábra: Abszolút helymeghatározás (a szerző szerkesztése)

Ahol Λ – a földrajzi hosszúság

Φ – a földrajzi szélesség

Relatív helymeghatározásról beszélünk, ha egy földi pont helymeghatározó adatait egy tetszőleges helyzetű derékszögű koordináta-rendszerhez viszonyítjuk (1.10. ábra).



1.10. ábra: Relatív helymeghatározás (a szerző szerkesztése)

A terepi pontok magasságainak meghatározásánál, hasonlóan, mint a vízszintes adatok mérésénél, a gyakorlati élet gyakran megelégszik a relatív magasságokkal. Azonban vannak olyan esetek, amikor az abszolút magasságra van szükség.

Tehát a gyakorlati élet során sok esetben általában elegendőek a relatív helymeghatározó adatok, ám vannak olyan feladatok, ahol szükséges az abszolút helymeghatározás. Ezért az állami geodéziai alapmunkákat úgy hajtják végre, hogy a földi pontok abszolút helymeghatározó adatai kiszámíthatók legyenek. Amikor egy kisebb területre kiterjedő és önmagában csak relatív helymeghatározást végzünk, de csatlakozunk az állami alapmunkálatok során meghatározott pontokhoz, akkor az általunk meghatározott pontok abszolút koordinátái is megadhatók lesznek.

1.6.1. A térbeli relatív helymeghatározásra irányuló mérésről általában

Geodéziai feladatok megoldásánál általánosan a nagyból a kicsi felé haladás elvét alkalmazzuk. Így járunk el helymeghatározásoknál is. Először az úgynevezett alappontok, majd ezek ismeretében, rájuk támaszkodva a részletpontok helymeghatározását hajtjuk végre.

Az alappontok és a részletpontok két különböző csoportba tartoznak. Az alappontok adják meg a mérések „keretét”, az alappontokból határozzuk meg a részletpontokat. Megakadályozzák a részletpontok meghatározásában az elkerülhetetlen mérési hibák továbbterjedését, és lehetővé teszik, hogy a részletpontok összhangja megmaradjon.

Az 1970-es évek elejétől kezdődően a geodéziai gyakorlatban is egyre nagyobb teret hódítanak maguknak a globális helymeghatározó műholdrendszerek. Ma már több globális helymeghatározó műholdrendszer működik, amely szabatos háromdimenziós helymeghatározásra szolgál bárhol a Föld felszínén és közelében, napszaktól és időjárástól függetlenül. Álló és mozgó objektumokra egyaránt alkalmazható. Részletesebb ismertetésüket lásd a *Geodézia II.* kötetben.

A továbbiakban a klasszikus mérési módszereket és eljárásokat tárgyaljuk. Mielőtt azonban ezek ismertetésébe belefognánk, meg kell ismerkednünk a geodéziában használatos mértékegységekkel, valamint a mérési hibákkal és azok hatásaival.

1.7. Mértékegységek

Minden mennyiség méréséhez először egy egységet kell felvenni. A mérés maga ezután mindig abból áll, hogy a mérendő mennyiséget valamilyen módon (közvetlenül vagy közvetve) összehasonlítjuk ezzel az alapul választott (egységnek felvett) mennyiséggel, és megállapítjuk a kettő viszonzyszámát. Ez a viszonzyszám a megmért mennyiség mérőszáma. Az alapul választott és egységnek tekintett mennyiséget pedig mértékegységnek nevezzük. A mértékegységnek gyakorlati szempontokat kell kielégítenie:

- egy társadalmi közösségen belül egységesen ugyanazokat a mértékegységeket célszerű használni;
- a mérést mindig választott mértékegységgel gondosan összehasonlított (komparált, hitelesített) mérőeszközzel hajtjuk végre;
- egymással összefüggésben lévő mennyiségek mértékegységeinek megválasztása esetén egyeseket alapul választanak, a többit pedig a fizikai törvények segítségével származtatják le;
- célszerű természetes mértékegységet választani, amelyet egyértelműen és az időben állandó módon maga a természet által kijelölt méretből levezethetünk. Ez a természetes mértékegység. A mesterséges mértékegység az, amelyet egy prototípus (etalon) testesít meg.

1.7.1. A hossz mértékegységei

Régen a hosszmértékeket többnyire az emberi test méreteivel határozták meg (például öl, könyök [rőf], láb, hüvelyk), vagy egyéb természetből vett méretekkel (például kis távolságokra az árpa-szem szélessége).

A francia Alkotmányozó Nemzetgyűlés 1790-ben elfogadott egy javaslatot az egységes mértékrendszer bevezetésére, és megbízott egy akadémiai bizottságot a végleges javaslat elkészítésére. 1791-ben Franciaországban a hosszmérés mértékegységeként a métert vezették

be, amely mint természetes mértékegység pontosan a párizsi csillagvizsgálón áthaladó földi meridiánkvadráns tízmilliomod része. 1799-ben megszületett a „definitív méter”. A párizsi levéltárban helyezték el a Lenoir által platinából készített prototípust, amelynek a homloklapjai közötti távolság 0 °C-on a méter.

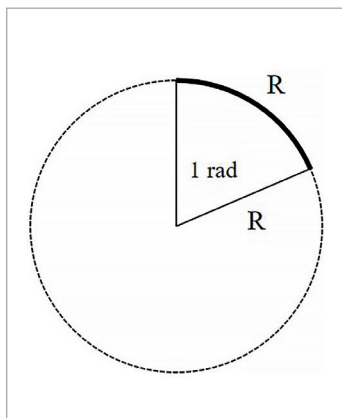
A nemzetközi kereskedelem növekedése szükségessé tette egy „nemzetközi” mértékegységrendszer bevezetését. Az 1870-ben Párizsban összeült nemzetközi bizottság elfogadta a métert a hosszúság nemzetközi mértékegységének. Az eltelt 80 évben a geodézia fejlődése világossá tette, hogy a méternek a Föld meridiánkvadránsához kötött definíciója nem tartható fenn. A métert tehát mesterséges, prototípussal megtestesített mértékegységnek kell tekinteni. A párizsi „definitív méterről” 30 másolatot készítettek irídium-platina ötvözetből. Az elkészült etalonokat összehasonlították a „definitív méterrel”, és közülük azt, amelyik legjobban egyezett a „definitív méterrel”, fogadták el a hossz mérés „nemzetközi” mértékegységéül.

1.7.2. A szög mértékegységei

Valamely szög mérőszáma alatt azt a számot értjük, amely kifejezi, hogy a szögegység hányszor foglaltatik az illető szögben.

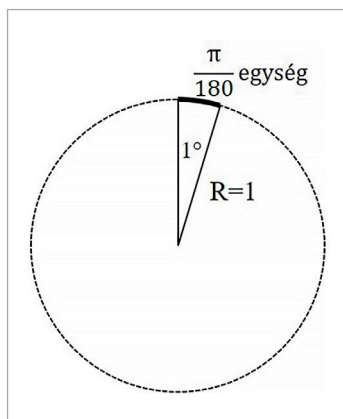
Analitikus rendszer: a szögegység az a szög (φ), amelyre nézve az ívhossz (s) egyenlő a sugárral (r) ($\varphi = 1$, ha $s = r$ vagy $\varphi = s/r$). Ez a szög a radián (1.11. ábra).

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 57.2958^{\circ} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot 3600\right)^{''} = 206264.8062^{''}$$



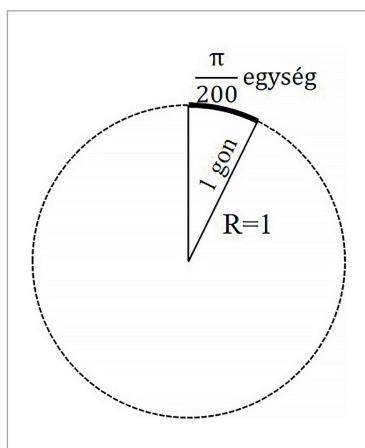
1.11. ábra: Az analitikus rendszer (a szerző szerkesztése)

Hatvanas (sexagesimális) fokrendszer: egysége a teljes szögnek a 360-ad része, amit foknak nevezünk. A fok hatvanadrésze a perc ($1^{\circ} = 60'$), a perc hatvanadrésze a másodperc ($1' = 60''$) (1.12. ábra).



1.12. ábra: A hatvanas fokrendszer (a szerző szerkesztése)

Százaz (centezimális) fokrendszer: egysége a teljes szögnek a 400-ad része, amit százaz foknak, újfoknak vagy gonnak nevezünk. A fok századrésze a centezimális perc ($1g = 100c$), a perc századrésze a centezimális másodperc ($1c = 100cc$) (1.13. ábra).



1.13. ábra: A százaz fokrendszer (a szerző szerkesztése)

1.7.3. A terület mértékegysége

A terület mértékegysége a négyzetméter (m^2), az 1 m oldalhosszúságú négyzet területe.

1.7.4. A tömeg mértékegysége

A tömeg mértékegysége a kilogramm. Az 1889-ben Párizsban megtartott Első Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg nemzetközi alpmértékének elfogadott a Súly- és Mértékügyi Hivatalban, Sèvres-ben őrzött platina-irídium henger tömege.

1.7.5. Az idő mértékegysége

Az idő mértékegysége a másodperc (s). A másodperc az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama.

1956-tól 1977-ig az efemerisz másodperc volt a Nemzetközi Mértékegység-rendszer (SI) időegysége, amely az 1900-as év január 1. 0 óra efemerisz időhöz tartozó tropikus év 31556925,9747 része. 1977 és 1984 között a földi dinamikus idővel párhuzamosan használták.

1.7.6. A hőmérséklet mértékegysége

A hőmérséklet mértékegysége

- Kelvin-fok (°K), a víz hármaspontja termodinamikai hőmérsékletének 273,16-od része;
- Celsius-fok (°C).

1.7.7. Régi mértékegységek

Bécsi öl, továbbosztása 6-os rendszerben történik:

1 öl = 6 láb = 6·12 hüvelyk = 6·12·12 vonal.

A nagyobb területek jellemzésére használták a kataszteri holdat (1600 öl²), a magyar holdat (1200 öl²) és kis holdat (1000 öl²)

2. A mérési hibák

A mérés sohasem adja a mérendő mennyiségek valódi hibátlan értékeit, hanem olyan eredményeket kapunk, amelyek többé-kevésbé hibásak. A meghatározandó mennyiség mért és valódi értékének különbségét nevezzük hibának.

A hibák létéről meggyőződhetünk, ha fölös méréseket végzünk, azaz ha a mérést többször megismételjük, vagy olyan mennyiségeket mérünk, amelyek között ismert matematikai kapcsolatok állnak fent. Akkor is fölös mérésről beszélünk, ha több adatot mérünk, mint amennyi a feladat egyértelmű meghatározásához feltétlenül szükséges. (Például egy háromszög belső szögeinek összege 180° , ha mind a három szöget megmérjük és összegezzük, akkor általában attól többé-kevésbé eltérő értéket kapunk.) A fölös mérés nem azt jelenti, hogy ezeket a méréseket felesleges végrehajtani, hanem általuk a pontosságot tudjuk növelni, becsülni.

A mérés tehát a mérési hibák miatt nem egyértelmű művelet. A fölös számú méréseknél a mérési eredmények nem egyeznek meg egymással, nem elégítik ki ellentmondás nélkül a közöttük fennálló összefüggéseket. A mérési hibák a mérőeszközök és az észlelő hibáiból, valamint a mérés külső körülményeinek hatásából származnak. Az ellentmondásokat a mérési eredmények javításával, kiegyenlítésével szüntetjük meg.

A mérési hibákat több csoportba sorolhatjuk. A különféle hibák más és más módon hatnak a mérési eredményekre, ezért hatásukat különböző módon kell figyelembe venni és csökkenteni.

2.1. A mérési hibák és csoportosításuk

2.1.1. *Durva hiba*

Durva hibának nevezzük azt a hibát, amely túllépi a mérés pontosságától követelhető határt. Durva hibát vétünk, ha például tévesen olvassuk le a mérőszalagon a méter értékét, vagy ha szögmérő műszernél rosszul olvassuk le a fokokat, vagy nem azt a pontot mérjük, amelyiket szükséges. Ennek oka legtöbbször az észlelő figyelmetlensége, gyakorlatlansága, fáradtsága. Ezek azonban gondos munkával elkerülhetők, ám még gondos munka mellett is elkövethetünk véletlenül durva hibát. A durva hibával terhelt mérési eredményt a számításokban nem használhatjuk fel. A mérést meg kell ismételni. A durva hibák felfedezése érdekében fölös mérések végzése szükséges.

2.1.2. *Álhiba*

Álhibának nevezzük azokat a hibákat, amelyek a mérésekből levezetett értékekben okoznak durva eltérést a mérések és a feldolgozás során. Ennek oka lehet hibás képletek alkalmazása, a mérést vagy számítást végző személy figyelmetlensége, a nem megfelelő mérési vagy számítási módszer alkalmazása. Az álhibák elkerülése érdekében a méréseket és a számításokat mindig átgondoltan kell elvégezni.

A durva hibáktól eltekintve az összes egyéb mérési hiba két csoportba sorolható.

2.1.3. Szabályos hibák

Azokat a hibákat, amelyeknek számértéke a mérések ismételése során egyoldalúan változik, szabályos hibának nevezzük. A szabályos hibák bizonyos rendszerességgel, meghatározott előjellel befolyásolják a mérési eredményeket. A szabályos hibáknak közös tulajdonsága, hogy a hibaszorozat középértéke (α) zérustól különböző szám.

$$\alpha = \frac{\sum \varepsilon_i}{n} \neq 0 \quad n \rightarrow \infty \text{ végtelen}$$

A szabályos hibáknak egyéb közös tulajdonságuk nincs, ezért kiküszöbölésükre, illetve hatásuk kisebbítésére egységes módszert nem lehet felállítani. Azonban hatásuk csökkentésére eljárhatunk háromféleképpen is:

- A hiba okát szüntetjük meg.
- A szabályos hiba értékét kiszámítjuk, és vele a mérési eredményt megjavítjuk.
- Mérési módszert állapítunk meg a szabályos hiba kiejtésére.

A szabályos hibákat jellegüknél fogva a következő típusokba soroljuk:

- Azon hibák, amelyek szabályossága a mérések ismételése során állandó marad. Ezeket állandó hibának nevezzük. (Ilyen például a szintezőlécek talpponti hibája, a magassági szög mérés indexhibája stb.)
- A mérendő mennyiség nagyságától függő hibák. (Például mérőszalagok komparálási hibája, fizikai távmérők frekvenciahibája.)
- Azok a hibák, amelyeknél a mennyiségnek az ismételt megmérésekor változik a szabályos hiba számértéke, de az egyes hibák előjele mindig állandó. Ilyen hiba például a szintezésnél a lécszög hatása, szalagmérésnél a szalag vízszintes kigyózásából keletkező hiba.
- Végül vannak olyan típusú szabályos hibaforrások, amelyek hatására a mérési eredmények hibája mind számértékre, mind előjelre változik. Az ilyen típusú hibákra csak az jellemző, hogy az összegük és így számtani középértékük is zérustól különböző szám.

A szabályos hibákat modellhibának is nevezik. Ennek oka, hogy tulajdonképpen a méréseink feldolgozására megalkotott matematikai modell nem fedti jól a valóságos helyzetet.

2.1.4. Szabálytalan (véletlen) hiba

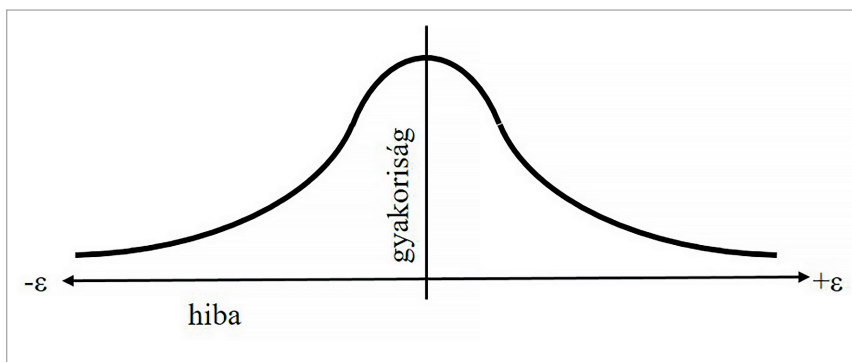
Szabálytalan (véletlen) hibának azokat a hibákat nevezzük, amelyek az értéküket a mérés megismételése alkalmával mind előjelre, mind bizonyos határokon belül nagyságra nézve a véletlen szerint változtatják. Keletkezésük nagyon sok, túlnyomóan ismeretlen hibaforrásra vezethető vissza. Ezeknek az okai azok az apró állapotváltozások, amelyek a mérés alatt a műszerben, az észlelőben, a mérés közegében végbemennek.

A méréseket terhelő véletlen hibákra Gauss a következő hibatörvényt állította fel.

- Az egyenlő nagyságú pozitív és negatív előjelű hibák előfordulásának valószínűsége egyenlő.

- A hibák valószínűsége a hibák nagyságának növekedésével csökken (nagy hibák kevesebbszer, kis hibák többször fordulnak elő).
- Végtelen nagy hiba valószínűsége zéró, végtelen kis véletlen hiba valószínűsége maximum.

A tapasztalat és Gauss iménti hibatörvénye szerint valamely véletlen hiba előfordulásának a valószínűsége tehát a hiba nagyságától függ, amelyet az alábbi görbe (haranggörbe) szemléltet. A vízszintes tengelyre a hibákat (ε) raktuk föl nagyság szerint, a függőleges tengelyre a felrakott hiba gyakorisága került (2.1. ábra).



2.1. ábra: A véletlen hiba előfordulásának valószínűsége (a szerző szerkesztése)

2.1.5. A valódi hiba

Valódi hibának nevezzük valamely mennyiség valódi értékének és a mért (mérési eredményből levezetett) értékének különbségét. Általánosan elmondhatjuk, hogy a valódi értéket nem ismerjük, ezért a valódi hiba is csak elméleti fogalom. (Például valódi érték egy háromszög belső szögeinek összege: 180° , és ha ezeket a belső szögeket megmértük, összegükre a valódi hiba megállapítható, de az egyes szögek valódi hibája mégsem lesz ismert.)

2.2. A hibák kiküszöbölésének lehetőségei

Mérési eredményeink feldolgozásakor feltételezzük, hogy méréseinket csak véletlen hibák terhelik. A durva hibákat különböző úgynevezett hibaszűrő eljárásokkal szűrjük ki, a szabályos hibákkal az egyes mérési eljárások, műszerek tárgyalásakor foglalkozunk, ahol meghatározzuk a célnak legjobban megfelelő kiküszöbölési eljárást is.

2.3. Mérési eredményeink minősítése

Mérési eredményeinket különböző mérőszámokkal minősíthetjük. A durva hibák előfordulásának valószínűségével foglalkoznak az úgynevezett megbízhatósági mérőszámok. A pontosságot jellemzik az úgynevezett pontossági mérőszámok:

Jelöljük U -val a mérés tárgyát képező ismeretlen mennyiség hibátlan értékét, L -l a mérés adta eredményt, ε -nal ennek valódi hibáját, akkor

$$\varepsilon = U - L$$

Ha n számú mérést végeztünk, akkor $L_1, L_2, \dots, L_n$ mérési eredményt és $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ hibasorozatot kapunk. A hibasorozat abszolút értékeinek számtani középértékét Laplace-féle *átlagos hibának* nevezzük:

$$\vartheta = \frac{[|\varepsilon_i|]}{n}$$

Ugyanennek a hibasorozatnak a Gauss-féle *középhibája* a hibák négyzetének középértékéből vont négyzetgyök:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon_i^2]}{n}}$$

Ezek a mérőszámok csak a megbízhatóságot jellemzik, de javító hatásuk nincs, vagyis a mérési értékek vagy a végeredmény megjavítására nem használhatók fel.

A középhiba sokkal érzékenyebb, mint az átlagos hiba. Összehasonlításképpen nézzünk egy számzerű példát. Legyen két hibasorozat:

$$\varepsilon = +4, -7, -3, +7, -4$$

$$\vartheta = \frac{[|\varepsilon_i|]}{n} = \frac{25}{5} = 5,00$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon_i^2]}{n}} = \sqrt{\frac{139}{5}} = \pm 5,27$$

$$\varepsilon = -15, +4, -1, 0, +5$$

$$\vartheta = \frac{[|\varepsilon_i|]}{n} = \frac{25}{5} = 5,00$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon_i^2]}{n}} = \sqrt{\frac{267}{5}} = \pm 7,31$$

Az átlagos hiba a két hibasorozatot egyenlő pontosságúnak minősíti, a középhiba ellenben megmutatja, hogy az első sorozat pontosabb, mint a második.

A középhibát rendszerint a vonatkozó mennyiség után írjuk $\pm$ előjellel. Például $t = 1233,18 \text{ m} \pm 0,014 \text{ m}$.

Egyes munkáknál a pontosság mérőszámául az úgynevezett *valószínű hibát* is használják. Ez a sorba rendezett hibasorozat középső eleme. Értékét a középhibából szokták számítani.

Az *átlagos*, a *közép-* és a *valószínű hiba* mint pontossági mérőszámok közül a geodéziai gyakorlatban a Gauss-féle középhiba használata terjedt el. Szokás még a pontossági mérőszámok és a mért mennyiség hányadosát mint általános pontossági mértéket használni, amit *relatív hibának* nevezünk. A relatív hibát tört alakban írhatjuk fel, mégpedig úgy, hogy a számlálóban 1 legyen. Például valamely $t = 5122 \text{ m}$ hosszúság középhibája $\mu_t = \pm 10,2 \text{ cm}$, akkor a *relatív középhiba*:

$$\frac{\mu_t}{t} = \frac{0,102}{5122} = \frac{1}{50216} = 1:50216$$

A középhiba fordítva arányos a pontossággal, ezért a gyakorlati számításokhoz célszerű volt egy olyan mérőszámot is bevezetni, amely egyenesen arányos a pontossággal. Ez a megbízhatósági mérőszám a súly. A súly fordítva arányos a középhiba négyzetével:

$$p = \frac{\mu_0^2}{\mu^2}$$

ahol μ_0^2 mindig pozitív, dimenzió nélküli tiszta szám.

Ha a súly $p = 1$, akkor $\mu_0^2 = \mu^2$ és $\mu_0 = \mu$. Ezért a μ_0 értéket a súlyegység középhibájának is nevezzük. Ha ismerjük a súlyegység középhibáját, akkor a mérési sorozattal kapcsolatos bármely mennyiség középhibáját – feltéve, hogy súlyát ismerjük – az előbbi képlet átrendezésével kiszámíthatjuk:

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{p_i}}$$

A mérési sorozattal kapcsolatos két tetszőleges mennyiség középhibájára és súlyára a következő arány áll fenn:

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\mu_1^2} : \frac{1}{\mu_2^2}$$

Legyen egy számpélda a pontossági mérőszámok tapasztalati értékeinek meghatározására.

A feladatunk annak a meghatározása, hogy egy adott mérési eljárással egyetlenegyszer megmérve egy meghatározott nagyságú mennyiséget, mekkora lesz a kapott mérőszám pontossága. Ennek érdekében a szóban forgó mennyiséget (mondjuk egy hosszt) többször megmértük. A mérési eredményeket az alábbi táblázat l oszlopa tartalmazza.

2.1. táblázat: Mérési eredmények (a szerző szerkesztése)

Sorszám	l (m)	ε (m)	v (m)	Sorszám	l (m)	ε (m)	v (m)
1	103,07	+0,051	+0,054	26	103,11	+0,011	0,014
2	12	+1	+4	27	19	−69	−66
3	22	−99	−96	28	18	−59	−56
4	13	−9	−6	29	13	−9	−6
5	16	−39	−36	30	08	+41	+44
6	10	+21	+24	31	18	−59	−56
7	08	+41	+44	32	13	−9	−6
8	15	−29	−26	33	06	+61	+64
9	04	+81	+84	34	14	−19	−16
10	09	+31	+34	35	14	−19	−16
11	18	−59	−56	36	12	+1	+4
12	19	−69	−66	37	09	+31	+34
13	02	+101	+104	38	17	−49	−49
14	20	−79	−76	39	15	−29	−26
15	09	+31	+34	40	04	+81	+84
16	13	−9	−6	41	12	+1	+4
17	06	+71	+74	42	15	−29	−26

Sorszám	l (m)	ε (m)	v (m)	Sorszám	l (m)	ε (m)	v (m)
18	09	+31	+34	43	14	-19	-16
19	17	-49	-46	44	10	+21	+24
20	15	-29	-26	45	13	-9	-6
21	10	+21	+24	46	20	-79	-76
22	06	+61	+64	47	15	-29	-26
23	17	-49	-46	48	12	+1	+4
24	10	+21	+24	49	08	+41	+44
25	09	+31	+34	50	15	-29	-26
Σ				5156,20	-0,150	0,00	

Ugyanezt a mennyiséget egy lényegesen pontosabb mérési eljárással is meghatároztuk: $L = 103,121$ m, így ezt az eredményt a vizsgálandó mérési eljárással kapott mérési eredményekhez viszonyítva valódi hibátlan értékek tekinthetjük. Számíthatók tehát az egyes mérési eredmények valódi hibáinak tekinthető $\varepsilon_i = L - l_i$ számértékek, amelyeket a táblázat ε oszlopa tartalmaz. Ezek felhasználásával a vizsgálandó mérési eljárás egyetlen mérési eredményének:

1. átlagos hibája

$$\vartheta = \frac{[|\varepsilon_i|]}{n} = \frac{1,918}{50} = \pm 0,038$$

2. középhibája

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon_i^2]}{n}} = \sqrt{\frac{0,10760 \text{ m}^2}{50}} = 0,046 \text{ m}$$

3. valószínű hibája

$$\varrho = 0,67 \cdot \mu = \pm 0,031$$

4. relatív hibája

$$\mu_r = \frac{\mu}{l} = \frac{0,046}{103,121} = 1:2242$$

5. a mérési eljárás átlagos szabályos hibája

$$\alpha = \frac{[\varepsilon_i]}{n} = \frac{-0,150 \text{ m}}{50} = -0,003 \text{ m}$$

Abban az esetben, ha valamilyen ok miatt nem áll módunkban egy lényegesen pontosabb mérési eljárással a vizsgálathoz valódi értékeknek tekintendő L mérőszám, tehát ε valódi hibák jó közelítő értékének a meghatározása, akkor számítjuk a mérési eredmények középértékét.

$$\bar{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{5156,20}{50} = 103,124 \text{ m}$$

Ennek felhasználásával számítjuk a $v = \bar{l} - l$ úgynevezett mérési javításokat, amelyeket a táblázat v oszlopa tartalmaz, majd a *középlehibát*:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v_i^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,107200 \text{ m}^2}{49}} = \pm 0,047 \text{ m}$$

2.4. Hibaterjedés

Ha valamely mennyiséget valamilyen matematikai összefüggés alapján olyan mennyiségekből határozunk meg, amelyeket hibák terhelnek, a meghatározott mennyiséget is hiba terheli. Ha adottak a meghatározó értékek középlehibái, akkor a meghatározott mennyiség középlehibája kiszámítható.

Tegyük fel, hogy az általunk keresett U mennyiség a megmért $x, y, z, \dots$ mennyiségekből az $U = f(x, y, z, \dots)$ általános alakú függvénnyel számítható ki. Magáról a függvényről feltételezzük, hogy folytonos és differenciálható. Az $x, y, z, \dots$ meghatározó mennyiségekről pedig feltételezzük egyrészt azt, hogy egymástól független mérésekből meghatározottak, másrészt azt, hogy kizárólag véletlen hibákkal terhelt mérési eredményekről van szó. Végül megjegyezzük, hogy a következőkben a fenti f függvénynek az egyes meghatározó mennyiségek szerinti parciális differenciálhányadosait az alábbi írásmóddal jelöljük:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f_z; \dots$$

A Gauss-féle hibatörvények szerint a meghatározó és meghatározott mennyiségek középlehibái között a

$$\mu_U = \sqrt{f_x^2 \cdot \mu_x^2 + f_y^2 \cdot \mu_y^2 + f_z^2 \cdot \mu_z^2 + \dots}$$

súlyai között pedig az

$$\frac{1}{p_U} = f_x^2 \cdot \frac{1}{p_x} + f_y^2 \cdot \frac{1}{p_y} + f_z^2 \cdot \frac{1}{p_z} + \dots$$

összefüggés áll fenn.

Megjegyezzük, hogy nem független mérési eredmények esetében is megoldható a feladat.

VÁKÁT OLDAL

3. A mérés alapműveletei

A gyakorlati geodézia célja a föld felszínén lévő természetes és mesterséges alakzatok geometriai adatainak meghatározása (felmérés), ezeknek az ábrázolása (térképezés), valamint a tervezett létesítmények kijelölése a terepen (kitűzés).

Ezen feladatok megoldásához egy alapfelületet (geoidot jól közelítő forgási ellipszoidot) és ehhez vetítővonalat (függővonal) választunk. A térszínen lévő pontokat a függővonalal vetítjük az alapfelületre. A vetített pontok helyének meghatározására szolgálnak a vízszintes mérések, a térszíni pont és a vetített pont távolságának meghatározására pedig a magassági mérések.

A térképen ábrázolt alakzatok pontjai (a részletpontok) helyzetének meghatározását a már korábban meghatározott alappontokhoz viszonyítva végezzük el.

3.1. Pontértelmezés

A gyakorlati geodéziában az alapfelületül választott geoid a vízszintes mérések szempontjából síknak tekinthető, ha a mérésbe bevont terület nagysága 50 km^2 -nél kisebb (4 km sugarú kör), ebben az esetben a vetítővonalak függőleges egyenesek, és párhuzamosnak tekinthetők. 500 km^2 -nél kisebb terület felmérése esetén, azaz 13 km sugarú körön belül a geoid gömbbel helyettesíthető, ekkor a függőleges egyenesek a gömb sugarai. Tetszőleges nagyságú terület felmérésekor a geoidot forgási ellipszoiddal helyettesítjük, ebben az esetben a függővonalak szóba jöhető rövid darabjai az ellipszoid normálisainak tekinthetők.

A gyakorlati geodézia vízszintes mérései szempontjából a pont és a rajta átmenő függőleges egyenes azonos fogalmak, mert a függőleges egyenes minden pontjának ugyanaz a természetes vetületi pont felel meg a geoidot helyettesítő alapfelületen.

3.2. Pontjelölések

A geodéziában a mérés elsődleges feladata a Föld felületén található természetes és mesterséges alakzatok alakjelző pontjainak meghatározása egy geodéziai (országos) koordináta-rendszerben. Ezek a pontok (részletpontok) például az épületek sarokpontjai, az utak, a vasutak, a csatornák, a töltések tengelypontjai, a telkek határpontjai, a jellegzetes tereppontok stb. Ahhoz, hogy ezeknek a részletpontoknak az összhangját, egységét biztosítani tudjuk egy nagyobb összefüggő területen, egy keretet kell létesítenünk. Ez a keret precízen meghatározott pontok rendszeréből áll. Ezeket a pontokat alappontoknak nevezzük.

Az alappontok lehetnek vízszintes vagy magassági alappontok, olykor mindkettő. Az alappontok különböző rendekre tagozódnak a meghatározásuk megbízhatósága, a meghatározási módszer, a meghatározás sorrendje és a részletpontok meghatározásánál betöltött szerepük szerint. Az I–IV. rendű pontokat országos alappontoknak nevezzük, amelyek $1,5 \text{ km}$ sűrűn hálózák be az ország területét. A felmérésekhez szükséges az alappontok további sűrítése. Ezek a pontok lesznek az V. rendű és a felmérési alappontok.

A pontok megjelölése lehet végleges és ideiglenes. A végleges pontjelölés, az úgynevezett állandósítás célja, hogy az egyes pontok fennmaradását biztosítsa. Erre azért van szükség, hogy ezeket a pontokat a későbbi, esetleg évtizedek múlva végrehajtandó mérésekkel is felhasználhassuk.

Az ideiglenes pontjelölés célja a pontoknak csupán az adott mérés időtartamára való megjelölése.

Az alappontokat mindig állandósítják az úgynevezett kisalappontok (alappontok legalacsonyabb rendjébe tartozó pontok) kivételével, amelyeket csupán a felmérés időtartamára jelölnek meg valamilyen egyszerű módon, például cövekkel.

3.2.1. Alappontok állandósítása

Az alappontok állandósítása (végleges megjelölése) rendszerint több pontjelből áll, mert az emberi tevékenység következtében az idők folyamán a jelölés egyes részei óhatatlanul elpusztulnak, és igen drága az alappont helyének ismételt kijelölése. Ilyen tevékenységek – amelyek az alappontok rongálódásához vezetnek – például a mezőgazdasági művelés alatti területek szántása, lakott területeken a burkolatjavítások vagy kábel- és csőfektetések.

Annak érdekében, hogy az elpusztult alappont térszínén lévő tényleges jele viszonylag egyszerűen helyreállítható legyen, az alappontok állandósításakor mindig elhelyeznek egy vagy több biztosító pontjelet, amelyek viszonyát a tényleges jelhez képest gondosan rögzítik.

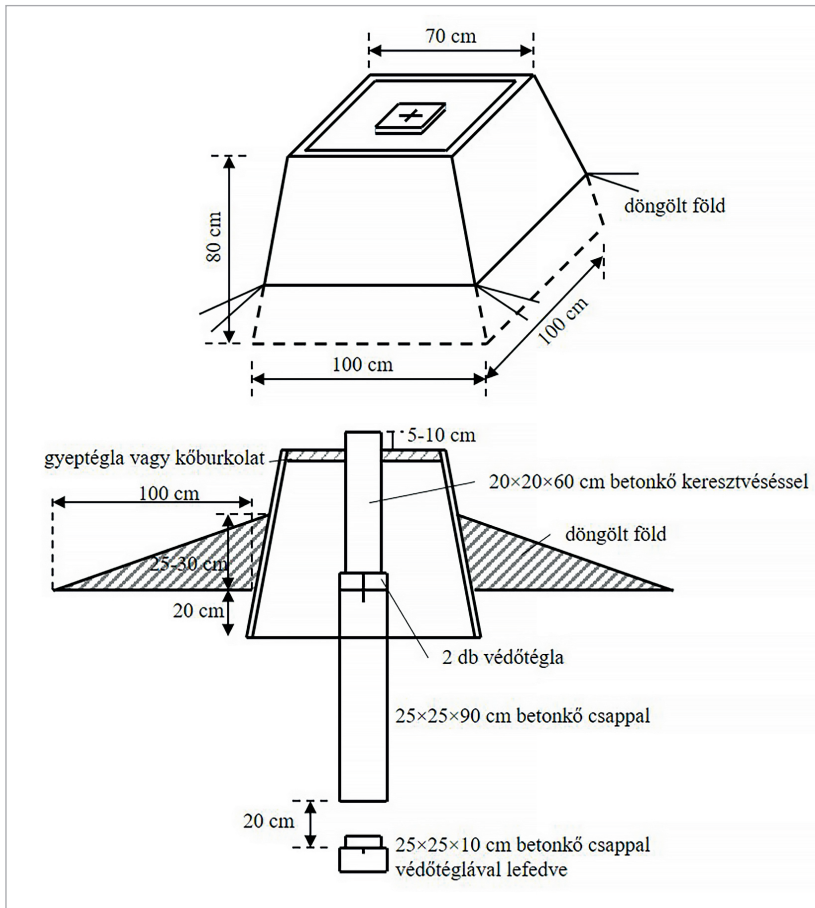
A biztosító jel lehet központos, amikor a tényleges pontjel függőlegesen helyezkedik el. Ilyenkor a jel általában a föld alá kerül, ezért föld alatti pontjelölésről beszélünk. A külpontos biztosító jeleket (örpontok) a ponttól távolabb helyezik el, róluk az alappont kis költséggel visszaállítható. A külpontos biztosító jelek lehetnek akár térszíni, akár föld alatti pontjelek is, ez mindig az adott körülményektől függ.

A következőkben bemutatunk néhány gyakrabban használt állandósítási módot.

3.2.2. Vízszintes pontjelek

A *felsőrendű alappontok* megjelölésére vasalt betonhasábot használnak, amelynek méretei kifejezik a pont rendűségét. A hasáb felső felületének közepén furatos bronzcsap vagy keresztvésés van, amelyre a koordináták vonatkoznak. A hasábot a talajba süllyeszti, fölé külterületen csonka gúla alakú védőművet állítanak. A biztosító pontjelölések külterületen a pont függőlegesében a kő alatt elhelyezett második (kisebb) kő vagy keresztvéséses téglá, belterületen a közeli épületek lábazatába úgynevezett őrcsapok, amelyekről a pontjelölés középpontja hosszméréssel kijelölhető. A pont térszíni és föld alatti pontjelöléseinek egy függőlegesbe kell esnie. A pont állandósítását követően a ponthoz közel jelzőoszlopot helyeznek el figyelemfelhívás céljából. Egy felsőrendű pontjel látható a 3.1. ábrán.

A *különleges pontjelölések* magas, karcsú építmények (gyárkémény, templomtorony), amelyek már messziről jól láthatók. Ezeken többnyire nem létesíthető műszerállás. A geodéziai mérések céljára épített vasbeton mérőtorony (3.2. ábra) leggyakrabban az elsőrendű alappontok felett látható. A hengeres építmény tetején rögzített pontjelölés akár 30 km távolságból is irányozható. A tetőszinten épített vasbeton pillér szolgál műszerállásul (3.2. ábra). Megemlítjük, hogy ezeket a mérőtoronyokat ma már nem igazán használják műszerállásként. Több mérőtorony működik kilátóként, ájtájszóállomásként.

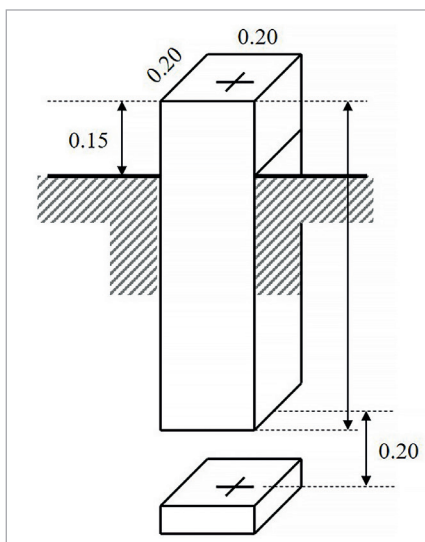


3.1. ábra: Felsőrendű pontjel (az ábra a szerző szerkesztése; fotó: [1] p. 5.)

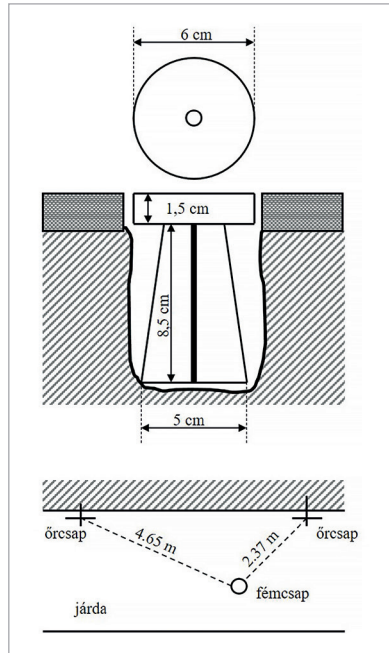


3.2. ábra: Vasbeton mérőtorony vasbeton pillér műszerállással [2]

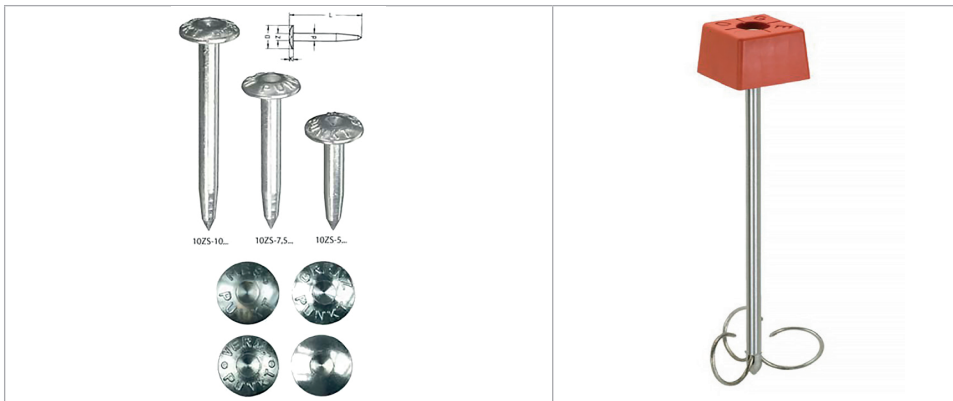
Az *V. rendű* és a *felmérési pontok* megjelölésére vasbeton követ (3.3. ábra), vascsapot (3.4. ábra), betonszeget (3.5. ábra) vagy Faynot-jelet (3.6. ábra) használnak.



3.3. ábra: Ötödrendű pontjel, vasbeton kő (a szerző szerkesztése)



3.4. ábra: Felmérési pontjel, vascsap (a szerző szerkesztése)



3.5. ábra: Betonszeg ([1] 6. p)

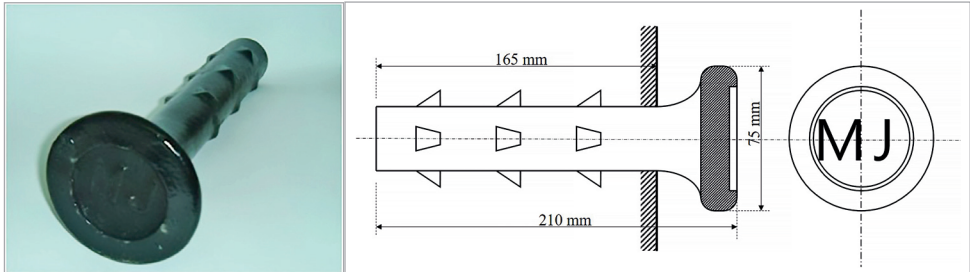
3.6. ábra: Faynot-pontjel [3]

3.2.3. Magassági pontjelek

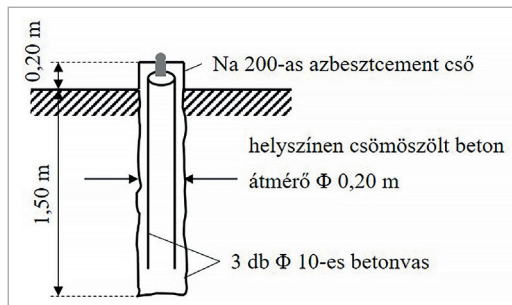
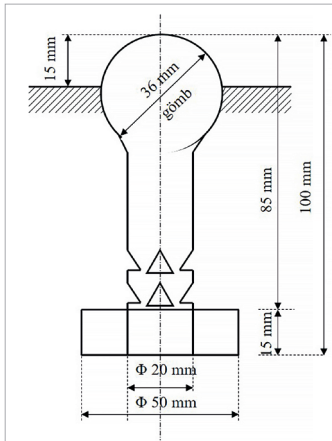
A magassági alappontok jelei általában nem azonosak a vízszintes alappontok jeleivel. A vízszintes alappontoknak sokszor van magassági adatuk is, amelyeket általában trigonometriai magasságméréssel, ritkábban szintezéssel határoznak meg.

A magassági pontmegjelölés mindig végleges. A pontjelnek mozdulatlannak kell lennie, és legmagasabb pontját szabatosan kell kijelölni. Magassági alappontok pontjeleként ma

leggyakrabban a *szintezési falicsap*, a *szintezési gomb* és a *szintezési kő* használatos. A pontjelek közül a szintezési csapot (3.7. ábra) épületek lábazatában rögzítik, a szintezési gombot (3.8. ábra) műtárgyak vízszintes felületébe cementezik. A magassági alappont megjelenése is kifejezi a pont rendűségét. A magassági alappontoknak nincs vízszintes koordinátájuk.



3.7. ábra: Szintezési csap (az ábra a szerző szerkesztése; fotó: [1] p. 1.)

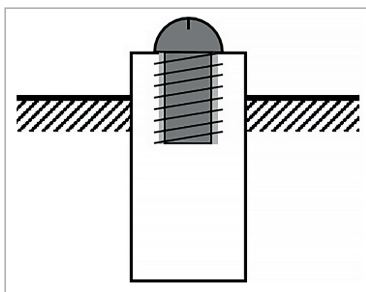


3.8. ábra: Szintezési gomb és kő (az ábra a szerző szerkesztése; fotó: [1] 3. p)

A magassági pontjelek anyaga régebben bronz volt, ma öntöttvas vagy alumínium. A megadott magasság a pontjel felső érintési síkjára vonatkozik. A szintezési falcsapot függőleges falsíkba építik be a talajtól számítva kb. 25 cm magasan. Elhelyezés után a falból 4-5 cm-re áll ki. A napjainkban használatos csapok véglapján MJ (magassági jegy) betűk vannak, de található más felirattal is: például ÁTI (Állami Térképészeti Intézet), VO (Vízrajzi Osztály). A szintezési gombot úgy betonozzák be (vízszintes vagy ferde felületbe), hogy csak a gömbfej fele álljon ki, hogy a szintezőlc rajta elhelyezhető legyen. Ha olyan helyen kell szintezési alappontot létesíteni, ahol a közelben építmény nincs, akkor szintezési követ helyezünk el.

3.2.4. Háromdimenziós pontjelölések

A megváltozott mérési technológiák és eszközök következtében szükségessé vált olyan pontjelölések alkalmazása, amelyek lehetővé teszik az egyértelmű magassági és vízszintes, illetve a háromdimenziós meghatározást. Tehát a pontjelölésnek a *magassági és a vízszintes pontjelölések tulajdonságait kell ötvöznie*. Ilyen pontjel a kőben elhelyezett *gömbölyű fejű, furatos csap*, amely rézből vagy acélból készül (3.9. ábra). Ezeket a pontjelöléseket speciális mérési feladatokhoz, elsősorban mozgásvizsgálati célra alkalmazzuk.



3.9. ábra: Gömbölyű fejű, csavarmenettel ellátott furatos pontjel (a szerző szerkesztése)

A speciális, műholdas helymeghatározáson alapuló mozgásvizsgálati mérési feladatoknál csavarmenettel ellátott pontjelölést használnak. A rézből készült rudat a szintén rézből készített perselybe csavarják. A rúd felső része is csavarmenetes, amelyre a GPS-antennát csavarják (3.10. ábra).



3.10. ábra: Csavarmenettel ellátott háromdimenziós pontjel és a rézrúdra erősített GPS-antenna ([1] 9. p)

3.2.5. Részletpontok állandósítása

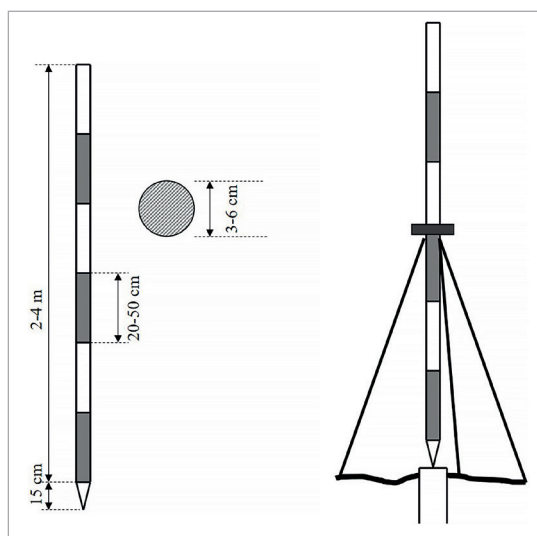
A részletpontoknak csak egy viszonylag kis részét állandósítják, más részük természetüknél fogva állandósítottnak tekinthető (például épületek sarokpontjai), és vannak olyan részletpontok, amelyeket sohasem állandósítanak.

3.2.6. Ideiglenes pontjelölések

Az ideiglenes jelölésnél kétféle érdek vezérelhet, a pontok között az összelátás biztosítása (például egyenesek kijelölésénél), illetve a pont helyének megjelölése.

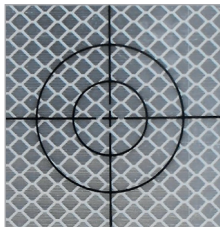
A pont helyének térszíni megjelölésére általában a térszínig levert vagy a talajból néhány centiméterre kiálló cöveket használunk. Burkolt járdán vagy úttesten burkolatba cementezett vagy bevert szöveget használnak, amelyek környezetét a könnyebb megtalálhatóság miatt be szokták festeni. A pontok láthatóvá tétele a távolság növekedésével egyre magasabb és nagyobb átmérőjű pontjelek használatát teszi szükségessé.

Amikor a pontokat csak néhány száz méteren belül kívánjuk látni, akkor azokat általában kitűzőrúddal jelöljük meg. A kitűzőrúd hosszúsága 2–4 m. Anyaga alumínium, keresztmetszete 3–6 cm átmérőjű kör. A rudat 50 cm-enként váltakozva fehér és piros/narancssárga színűre festik. A rúd végén vashegy van, ennek segítségével könnyen szúrható le a földbe. Burkolt járdán, úttesten vagy kőre kitűzőrudat vasállvánnyal, úgynevezett vasfiguránssal állítják fel (3.11. ábra).



3.11. ábra: Kitűzőrúd (a szerző szerkesztése)

A mai gyakorlatban a mérőállomások elterjedésével megjelentek a mérőfóliák vagy más néven fóliaprizmák (3.12. ábra) mint ideiglenes pontjelek. Felmérési alapponthálózat pontjait, valamint a kivitelezések geodéziai munkáinál az alappontokat szokták ily módon megjelölni. Többnyire építmények, oszlopok felületére ragasztják fel a fóliákat. A mérőfóliák általában négyzet alakúak, különböző méreteken gyártják, általában 20×20 mm-től 90×90 mm-ig.



3.12. ábra: Mérőfólia [4]

3.3. Pontleírás

Az alappontok állandósítását és meghatározását követően azokról úgynevezett pontleírást kell készíteni. A pontleírás szöveges és grafikus részből áll. A szöveges rész tartalmazza a pont azonosítóját, helymeghatározó adatait, az állandósításra vonatkozó adatokat: az állandósítás éve, módja, az állandósítást végző cég és személy neve. A grafikus rész a helyszínrajz, amely a pont megtalálását és terepi azonosítását segíti (3.13. ábra).

A pontleírás részleteiben eltér magassági, vízszintes és háromdimenziós pontok esetén. A pontok megtalálását segíthetik a pontokról készült fényképek is.

Vízszintes alappont pontleírása									
EOV				625 179,71		94 188,38		EOV: 15-1143	
Transz-formált		ST.	-	126 416,49	+	59 707,43	A pont száma: régi:		
		HKR	-	126 412,18	+	21 942,32	Nyilvántartási térkép jele 15 - 11		
		Y			X		Község: FELSZŐSZISÁK		
							Megye: Tolna		
							Meghatározta: BGTV 1984 évben		
Helyszínrajz, leírás:					Állandósította: Vizi Gábor				
E					1984 évben 25x25x90 méretű HP 1984 jelű				
Sz					vasbeton kövel, vagy				
15-1143					A központ jele: furatos rézcscap.				
L					Földalatti jel: 20x20x10 cm				
(161,75)					Pontvédő ber.: 2 db. 2.5 m-es vb jelzőoszlop				
30,00					Örpontok:				
27,60					Balti magasság				
-58,0					Kö: 92,12				
-39,0					Fa.jel: 90,94				
25x200					Tor.:				
ártér					Munkaszám: 36/1984				
0769					Nyilv.sz.: 115				

EOMA

Pontleírás

Helyszínrajz:	A pont száma: 0013294-1 A pontmegjelölés módja: _____) tárcsa gomb kő (1,5..... méter mélységű) EOMA magasság: 123,456 méter Térképszelvény száma: 15 - 11 Helység: FELSŐSZISZÁK Megye: TOLNA Állandósítás éve: 1984 Mérés éve: 2016 Helyszínelés éve: Azonos: 4501 (B 123,452 m)
Helyszínrajzi leírás: Szentgotthárd - Hidasnémeti közötti út 129,950 km-nél, az út ÉK-i oldalán.	
Megjegyzés: EOY koordináta Y=625 076 X=94 275	

3.13. ábra: Pontleírások (a szerző szerkesztése)

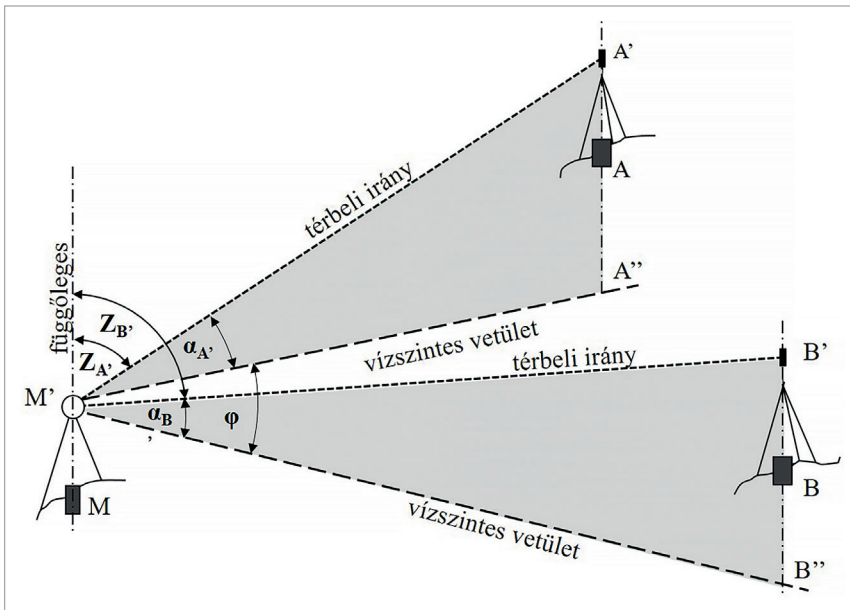
4. Szögmérés

4.1. A vízszintes szögmérésről általában

A vízszintes helymeghatározáshoz az alapfelületen értelmezett (vízszintes) szögek és távolságok meghatározása szükséges. A vízszintes szögön a szögszárakra illeszkedő két függőleges sík lapszögét értjük, és ezt a szöget tudjuk mérni.

A geodéziában a földfelszín valamely M pontja fölé (esetleg alá) helyezett M' pontból mérjük az A , valamint B pontok fölé (esetleg alá) helyezett A' és B' pontok által meghatározott térbeli irányok vízszintes vetületeit, a vertikális síkok által bezárt φ vízszintes szöget (vízszintes szögmérés).

Mérjük továbbá az $A'B'$ térbeli iránynak a saját vízszintes vetületével alkotott $\alpha_{A'}$ illetve α_B magassági szögét vagy az $A'B'$ térbeli iránynak az M' ponton átmenő függőlegessel bezárt $Z_{A'}$ illetve Z_B zenitszögét (magassági szögmérés) (4.1. ábra).



4.1. ábra: A geodéziában mérendő szögek (a szerző szerkesztése)

4.2. A teodolit

A szögek – mind a vízszintes, mind a magassági szögek – mérésére alkalmas műszer a teodolit. Annak érdekében, hogy a teodolittal mérni tudjunk, a műszer szerkezeti elemeinek különböző geometriai feltételeket kell teljesíteniük. A szerkezeti elemeket a 4.2. ábra mutatja.

A vízszintes és a magassági szögek méréséhez szükséges két, beosztással ellátott kör, amelyeket vízszintes körnek (másnéven limbuszkörnek) és magassági körnek nevezünk. A pontok pontos megírányzásához távcső szükséges. A távcső két, egymásra merőleges tengely körül

forgatható. Ezeket a tengelyeket nevezzük állótengelynek és fekvőtengelynek. A geodéziai távcső irányvonala a szálkereszt középpontját az objektív optikai középpontjával összekötő egyenes.

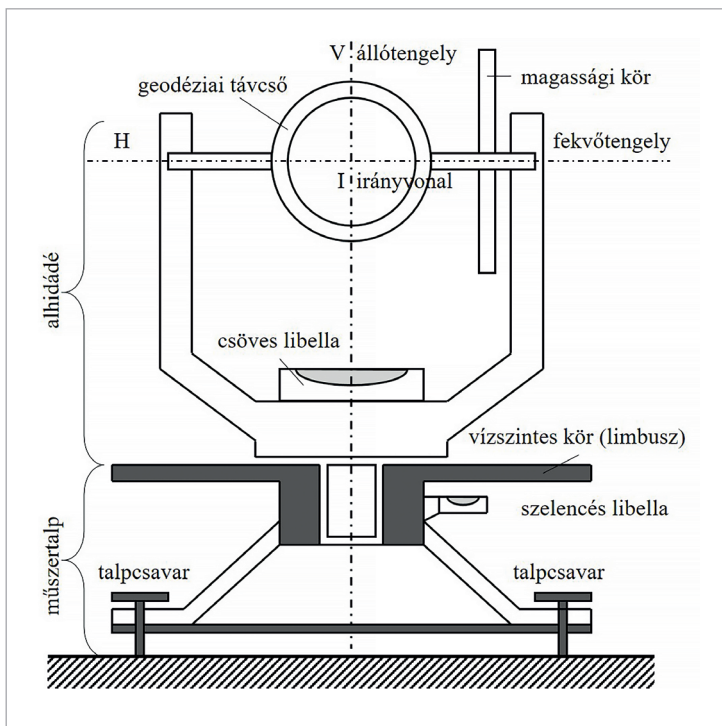
A mérések végrehajtásához szükséges, hogy az állótengely meghosszabbítása a mérendő szög csúcsán menjen keresztül, valamint az állótengely függőleges legyen. Erre valók a vetítőberendezések és a libellák.

A teodolit szerkezeti elemeinek különböző geometriai feltételeket kell kielégítenie. Ezek a következők:

- Az állótengely legyen merőleges a vízszintes körre, és annak középpontján haladjon át.
- A fekvőtengely legyen merőleges a magassági körre, és annak középpontján haladjon át.
- A fekvőtengely legyen merőleges az állótengelyre.
- A geodéziai távcső irányvonala metssze az állótengelyt.
- A geodéziai távcső irányvonala metssze a fekvőtengelyt.
- A geodéziai távcső fekvőtengely körüli áthajtásakor az irányvonal által súrolt sík (az állósík) legyen merőleges a fekvőtengelyre.

4.2.1. A teodolit felépítése

Az egy pontból induló irányok relatív helyzetének meghatározására szolgáló műszer a teodolit. Fontosabb részei:



4.2. ábra: A teodolit részei (a szerző szerkesztése)

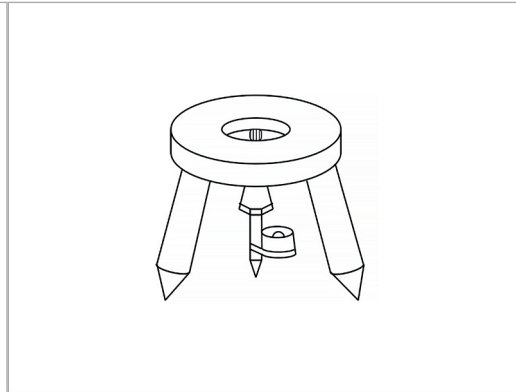
4.2.2. A teodolit szerkezete

4.2.2.1. A műszerállvány

Ahhoz, hogy az irányzásokat és leolvasásokat kényelmes testhelyzetben tudjuk elvégezni, a teodolitot az észlelő magasságában kell elhelyezni. Erre szolgál a műszerállvány (4.3. ábra), illetve ha pilléren vagy asztalon dolgozunk, a műszeralátét (4.4. ábra).



4.3. ábra: Műszerállvány [5]



4.4. ábra: Műszeralátét (a szerző szerkesztése)

A műszerállvány két részből áll:

- a fejezetből,
- a fejezettel csuklósan kapcsolt három állványlából.

A pontra állás megkönnyítésére a fejezeten közepén néhány cm átmérőjű nyílás van. Ezen halad át az összekötőcsavar szára. Az összekötőcsavar hosszirányban egy vezetősínben elmozdítható és a vezetősínnel együtt elforgatható. A műszert a fejezethez az összekötőcsavarral erősítjük.

4.2.2.2. A műszertalp

A műszertalp feladata, hogy a műszert rögzíteni tudjuk a műszerállványon vagy műszeralátéten.

A műszertalp a műszerállvány összekötőcsavarjának befogadására alkalmas anyacsavart, az állótengely függőlegessé tételét lehetővé tevő talpcsavarokat, az osztott vízszintes kört (limbuszt) és az állótengely (alhidádétengely) befogadására szolgáló perselyt (csapágyat) foglalja egy szerkezeti egységbe.

A talpcsavarok

A talpcsavarok a műszertalpnak – és ezzel az állótengelynek – a nagyon finom dönthetőségét teszik lehetővé, így a teodolit állótengelye függőlegessé tehető. A hármas alátámasztás elve szerint három talpcsavart szoktak alkalmazni egymástól 120-120°-ra elhelyezve.

A limbusz

A műszertalpon az állótengelyre merőleges síkban központosan van elhelyezve a vízszintes osztott kör, a limbusz. A beosztások nagyon régen ezüstszalagra karcolással készültek, majd a későbbi műszereken üveggörön fotográfiai eljárással, maratással. A hazánkban használatos műszerek limbusza a 60-as fokrend szerint osztott, legkisebb egysége a műszer pontosságától függően 1° és $10'$ közötti érték. Az osztásrészek számozása az óramutató járásával megegyezően folytatódólagosan 0° -tól 360° -ig terjed.

Ma már jellemzően elektronikus vagy más néven digitális teodolitokat használunk, amelyek esetén a körleolvasás technológiája elektronikus. A körök az osztásokat az automatikus körleolvasás miatt kódolt formában tartalmazzák. Ezeken a vízszintes körök egysávú kódolt körök (4.5. ábra). A kódosztások változó szélességűek és optikailag eltérő tulajdonságúak, átlátszóak (fehér) vagy átlátszatlanok (fekete).



4.5. ábra: Kódolt kör [6]

Állótengely

Az állótengely feladata az alhidádé központos és stabil forgatása mellett az alhidádé súlyának műszertalpra való átadása.

A különböző megoldások közül ma már alapvetően a vezetőgyűrűs-golyóscsapágyas szerkezetet alkalmazzák.

4.2.2.3. Az alhidádé

Az alhidádé fontosabb szerkezeti elemei és azok feladatai a következők:

A geodéziai távcső

A geodéziai távcső szerepe a szükséges távolságig lehetővé tenni az irányzást. A pontjelet akkor mondjuk vízszintes értelemben beirányzottnak, ha képe szimmetrikus az álló irányszálhoz képest. A geodéziai távcsövek belső képállítású távcsövek, amelyeknek változtatható a fókusz-távolsága.

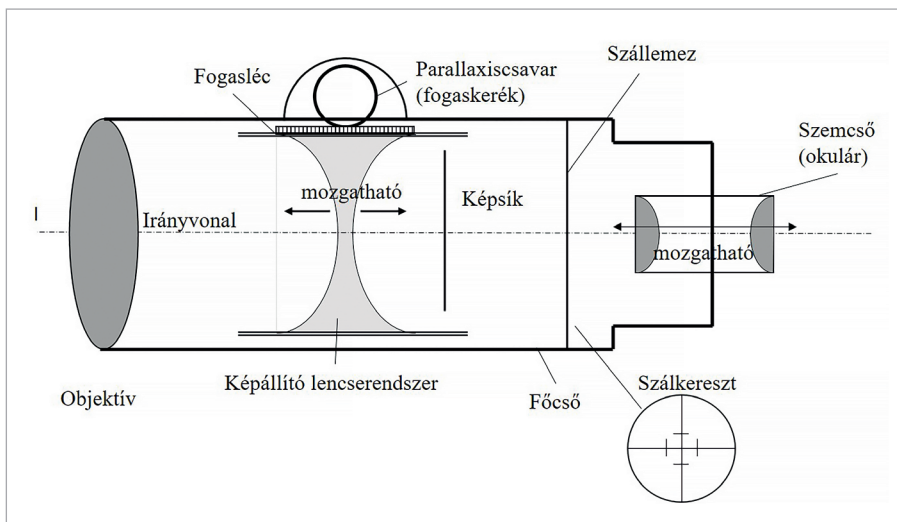
A teodoliton a távcsővel a következő műveletek végezhetők:

- A távcső az állótengelyre (alhidádétengelyre) merőleges fekvőtengely körül forgatható.
- A távcső áthajtható (a távcsövet a fekvőtengely körül mintegy 180° -kal elforgatjuk).
- A távcső az alhidádéval együtt forgatható az alhidádétengely körül.
- A távcső átforgatható (a távcsövet az alhidádétengely körül 180° -kal elforgatjuk).

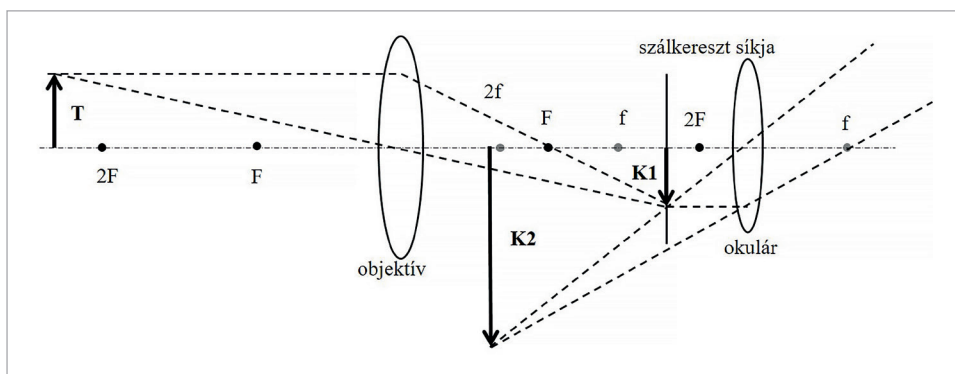


4.6. ábra: A teodolit tengelyei (a szerző szerkesztése [7] felhasználásával)

A teodolit távcsővel bármely pontot a távcső két állásában lehet megirányozni. Az egyiket az első (I.) távcsőállásnak, a másikat pedig a második (II.) távcsőállásnak nevezzük. Az első távcsőállás a távcső azon helyzete, amikor a magassági kör balról helyezkedik el.



4.7. ábra: Belső képállítású geodéziai távcső (a szerző szerkesztése)



4.8. ábra: A geodéziai távcső képalkotása (a szerző szerkesztése)

Ahhoz, hogy a megírányzandó pontot gyorsan meg lehessen irányozni, a távcső főcsővére egyszerű irányzékot, úgynevezett keresőkollimátort szerelnek, amivel megírányozva a pontjelet, a pont képe az irányzó távcső látómezejébe kerül. A geodéziai műszerek távcsővének szögnyújtása 25–40-szeres.

A ma használatos teodolitok belső képállású távcsővel szereltek (4.7. ábra).

A távcsőtől különböző távolságokban elhelyezkedő tárgyak képe nem közvetlenül a főcsőbe szerelt szálkereszt síkjában keletkezik. Ezt a jelenséget, amikor az objektív képsíkja és a szálsík nem esik egybe, parallaxisnak nevezzük. A parallaxiscsavar forgatásával (a képállító lencse mozgatásával) elérhető, hogy a képsík egybeessen a szálsíkkal, azaz a parallaxis eltűnjön (éles lesz a kép).

Az okulár csavarásával elérhetjük, hogy a szálkereszt képe a szem távolpontjába kerüljön, tehát amikor a legélesebben látjuk a szálkeresztet (4.8. ábra).

A távcső irányvonala az objektív optikai középpontján és a szálkeresztnek metszéspontján átmenő egyenes.

A kötő- és paránycsavarok

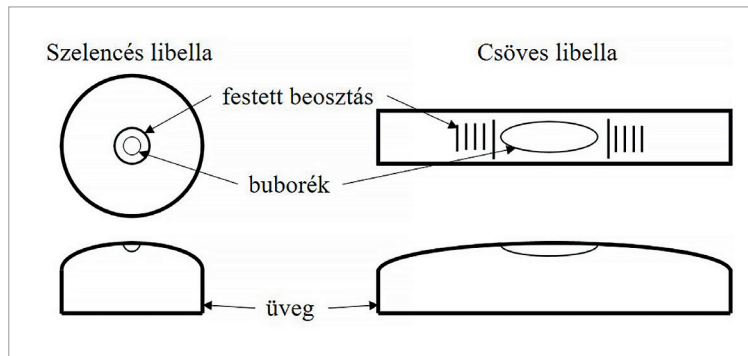
A teodolitokon általában két kötő- és paránycsavar van. A vízszintes kötő- és paránycsavar az alhidádét köti a műszertalphoz, a magassági kötő- és paránycsavar a távcsőnek a fekvőtengely körüli forgatását rögzíti.

A szorzó rendszerű teodolitokon régebben külön limbusz kötő- és paránycsavar szolgált a limbusznak a műszertalphoz való kötésére, újabban már csak kötőcsavart (funkcióváltó billentyűt) használnak a limbusz alhidádéhoz való kapcsolására.

Libellák

Teodolitokon általában két libellát szerelnek, egy csöves és egy szelencés libellát. A szelencés libella az állótengely-közelítő, míg a csöves libella az állótengely pontos függőlegessé tételére szolgál.

A geodéziában használatos libella egy olyan zárt üvegedény, amelyet belső felületének alkalmas csiszolása után alkohollal vagy éterrel úgy töltenek meg, hogy a kitöltő folyadék gőze néhány mm átmérőjű buborékot alkosson. Az edény alakja szerint megkülönböztetünk csöves és szelencés libellát (4.9. ábra). A szelencés libella hengeres üvegedényének felső zárólapja belül gömbsüveg alakú, a csöves libella csiszolt felületének tengelyirányú függőleges metszete kör.



4.9. ábra: Libellák (a szerző szerkesztése)

Két szomszédos beosztásvonás távolsága jellemzően 2 mm, a beosztásegységhez tartozó középponti szög a libella állandója:

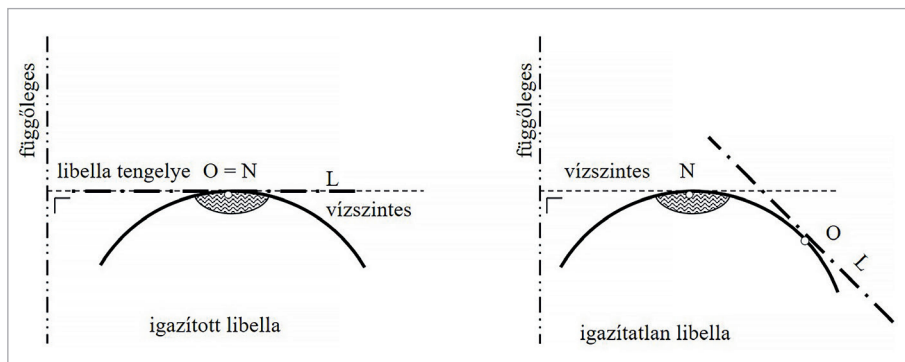
$$\alpha = \frac{2 \text{ mm}}{r} \cdot \varrho''$$

ahol r – a libellakörív sugara,

ϱ'' – a radián szögmásodpercekben kifejezett értéke.

A teodolitokon alkalmazott csöves libellák állandója 5'' és 20'' közötti érték. A szelencés libellák állandója kisebb, mint a csöves libelláké, értéke 5''–60'' között változik.

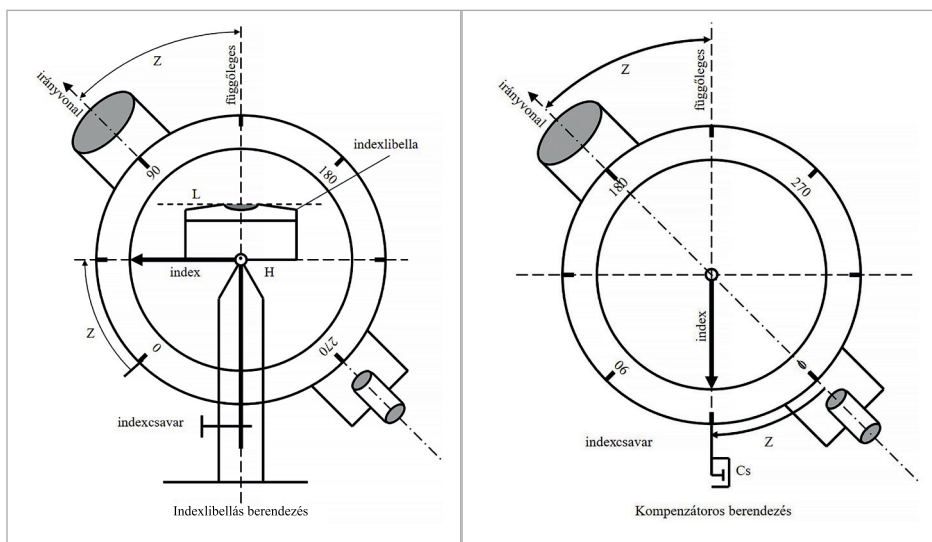
A libella jellemző pontjai: a normálpont (N) és az alaki középpont (O). Az alaki középpont (O) a libella beosztásának középpontja, az ehhez húzott érintőt a libella tengelyének (L) nevezzük. A normálponthoz húzott érintő merőleges az állótengelyre (4.10. ábra).



4.10. ábra: Libella jellemző pontjai (a szerző szerkesztése)

Magassági kör

Minden teodoliton van magassági kör, amely üvegből készül, és folyamatos osztású. A magassági kört a fekvőtengelyre merőlegesen ékelik föl. Vízszintes index (mutató) esetén a 90° – 270° vonásokat összekötő egyenes, függőleges index esetén pedig a 0 – 180° vonásokat összekötő egyenes (4.11. ábra) párhuzamos az irányvonallal.



4.11. ábra: Indexmutató (a szerző szerkesztése)

A beosztott magassági kör a távcsővel együtt forog. Az indexnek a leolvasáskor vízszintesnek, illetve függőlegesnek kell lennie, és át kell mennie a kör középpontján (4.11. ábra), amit a kompenzátoros berendezés biztosít. A kompenzátoros műszerekben a függőleges helyzetet az indexkompenzátor hozza létre automatikusan.

A kör számozása leggyakrabban folytatódó (0– 360°), a kör felerősítése zenitszög szerinti: ilyenkor közel vízszintes irányvonal mellett a leolvasás közel 90° , illetve a második távcsőállásban közel 270° , a zenitszög értéke pedig

$$Z = \frac{Z^I + 360^\circ - Z^{II}}{2}$$

ahol Z^I és Z^{II} a két távcsőállásban végzett mérés során kapott körleolvasások.

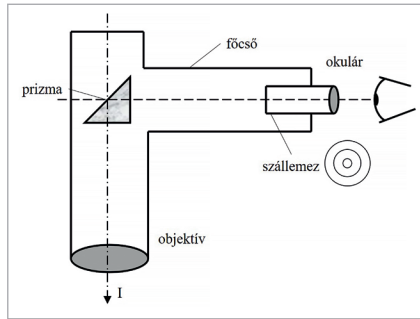
Első távcsőállásban a magassági kör az okulár felől nézve bal kéz felé esik. Az első távcsőállásból a távcső szükséges mértékű áthajtásával és az alhidádé 180° -os átforgatásával hozhatjuk a műszert a második távcsőállásba.

Vetítők

A teodolitoknál használt vetítőberendezések a teodolit függőlegessé tett állótengelyének a meghosszabbítására szolgálnak, hogy az (állótengely) a mérendő szög csúcsán menjen keresztül.

A ma használatos teodolitokon két különböző típusú vetítőberendezést alkalmaznak. A vetítés történhet optikai úton, ezek optikai vetítők. A másik típusnál a műszer törzsébe épített lézerfényforrás segítségével történik a vetítés, ezek a lézervetítők. Régebben a vetítést vetítőeszközökkel végezték, ezek voltak a függők és a vetítőbotok.

Az optikai vetítő (4.12. ábra) egy tört távcső, amelyet úgy alakítanak ki, hogy az irányvonala az állótengely meghosszabbítása legyen. Az optikai vetítőt vagy a műszertalpba, vagy az alhidáéba építik.



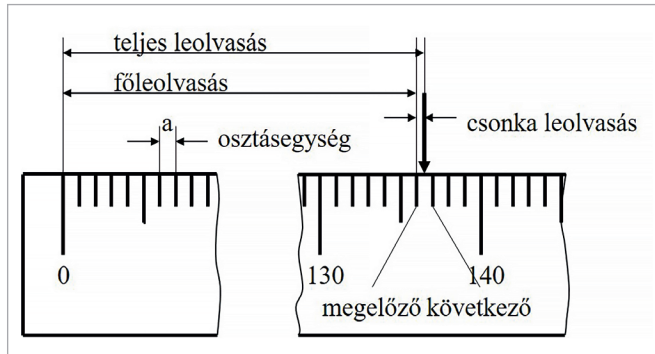
4.12. ábra: Optikai vetítő (a szerző szerkesztése)

Lézervetítő esetén az állótengely meghosszabbítását a műszertörzsben elhelyezett lézerforrás sugara jelenti. A lézervetítő egy másik szerkezeti megoldása, amikor a műszertalpra a lézervetítőt mereven szerelik fel.

Az optikai vetítővel a pontra állás 0,5-1,0 mm pontossággal végezhető el, lézervetítő esetén ennek értéke 1-2 mm.

Leolvasóberendezések

A leolvasóberendezések a szöghelyzet meghatározására szolgálnak. A leolvasás valamely beosztás kezdővonása és a beosztáshoz használt indexvonás közötti távolságnak (ív hossz) meghatározása. Részei közül a főleolvasás a kezdővonás és az indexvonást közvetlenül megelőző beosztásvonás közötti távolság (ív hossz), a csonka leolvasás az indexet megelőző beosztásvonás és az indexvonás közötti távolság (ív hossz) (4.13. ábra).

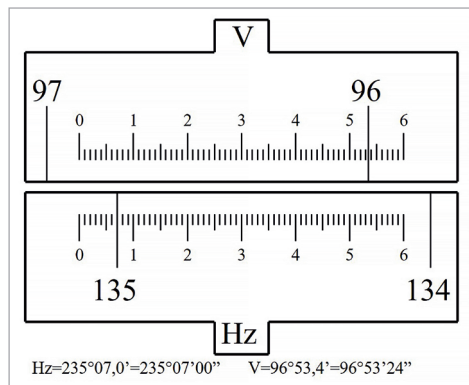


4.13. ábra: A leolvasás részei (a szerző szerkesztése)

Ahhoz, hogy a teodolittal irányokat (szögeket) tudjunk mérni, le kell tudnunk olvasni a különböző távcsőhelyzeteket a vízszintes és a magassági körökön.

A geodéziai műszerekben használatos leolvasóberendezések:

a) Beosztásos mikroszkóp

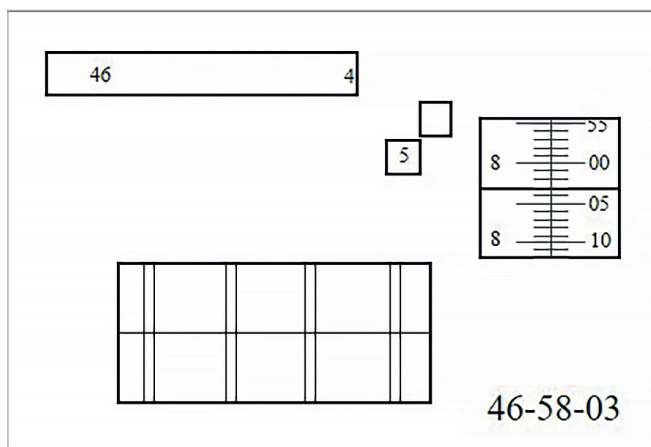


4.14. ábra: A beosztásos mikroszkóp látómezeje (a szerző szerkesztése)

Hz a vízszintes, V a magassági körleolvasást jelenti. A két beosztás számozása ellentétes irányú. A főleolvasást a mikrométer-beosztásban található főbeosztásvonás értéke adja, és ugyanez a főbeosztásvonás szolgál indexül a csonka leolvasáshoz. A csonka leolvasás tizedbecslése is lehetséges, így a teljes leolvasás tizedperc élességű (4.14. ábra).

b) Optikai mikrométeres mikroszkóp

A leolvasásokat egyesítő berendezésnek egy átmérő mentén két indexe van, a két index egyazon mikroszkóp látómezejébe van vetítve. Az optikai mikrométer segítségével a beosztásrészletek osztásvonásai egy egyenesbe (koincidenciába) állíthatók, ekkor a mikrométer beosztásán éppen a csonka leolvasás látható (4.15. ábra).



4.15. ábra: A koincidenciás leolvasóberendezés látómezeje (a szerző szerkesztése)

A körleolvasás automatizálása

Az elektronikus teodolitok a körleolvasást automatikusan állítják elő. A leolvasás kettes számrendszerben számítógépi feldolgozásra alkalmas módon rögzíthető, de tízes számrendszerbeli alakban jelenik meg a kijelzőn.

A *főleolvasás* automatizálására a számlálás módszer a használatos. Ennek a módszernek az a lényege, hogy a műszer megfelelő szerkezeti elemének (vízszintes körleolvasásnál az alhidádénak, magassági körleolvasásnál a távcsőnek) forgatása közben a leolvasóberendezés folyamatosan számolja az index előtt elhaladó osztásközöket. Az eredményét folyamatosan előjelhelyesen hozzáadja a számológép korábbi tartalmához. A leolvasóberendezés a forgásirányt is érzékeli. Az óramutató járásával megegyező forgásirányban pozitív, ellentétes irányban pedig negatív előjelet kap a számláló. Ha a forgatás leáll, a vezérlőegység megjeleníti a kijelzőn a számológép tartalmát.

A *csonka leolvasást* az irányzás befejezése után állítja elő, amikor az index és a beosztott kör egymáshoz képest már mozdulatlan. Előállításának leggyakoribb módszere az index helyzetének interpolációja. A berendezés két mennyiséget mér: az index és az azt megelőző beosztásvonás távolságát, és beosztásköz nagyságát. A két mennyiség hányadosa adja a csonka leolvasást.

4.2.3. A teodolit használata

Ahhoz, hogy a teodollal méréseket tudjunk végezni, a teodolitot a pont fölé kell állítani úgy, hogy a függőleges állótengely meghosszabbítása a mérendő szög csúcsán menjen keresztül.

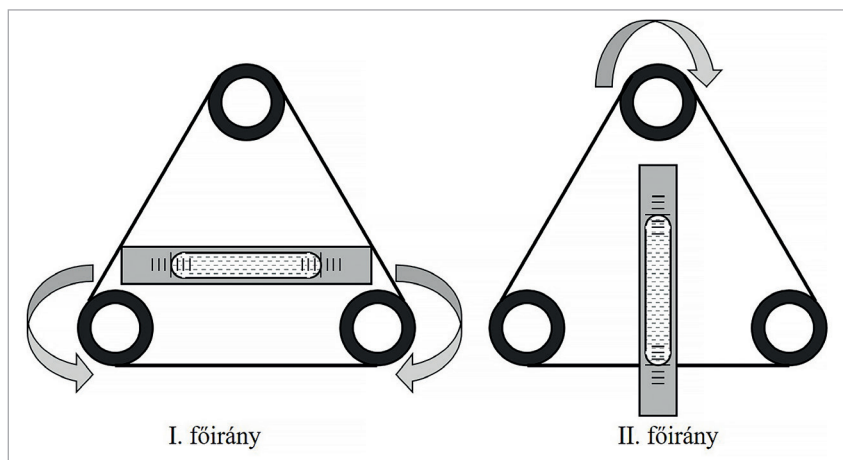
A teodolit felállítása két lépésből áll, az egyik a pontra állás, a másik az állótengely függőlegessé tétele.

A pontra állás előtt a műszerállványt úgy kell a pont fölé helyezni, hogy a fejezete közel vízszintes legyen. Figyelni kell arra, hogy a műszerállványt ne állítsuk sem túl magasra, sem túl alacsonyra ahhoz, hogy a mérést kényelmes testhelyzetben tudjuk elvégezni. A műszerállvány lábait a pont körül közel 120°-os szögtávolságban nyissuk szét, ezáltal biztosítva a stabilitását.

A műszerállvány pont fölé helyezését az összekötőcsavaron keresztül nézve végezzük. A műszerállvány elhelyezése után tapossuk a műszerlábakat a földbe annyira, amennyire csak lehetséges. Ezután a műszert az állvány fejezetére rakjuk úgy, hogy a műszertalp az állványfejezet közepére kerüljön, és élei párhuzamosak legyenek az állványfejzettel, majd az összekötőcsavarral rögzítjük a műszert a fejzethez. Ezt követően a vetítővel vetítsük le az állótengely meghosszabbítását, és ha a pont nincs a meghosszabbított állótengely közelében, akkor a műszert az állványfejzetről levesszük, és a műszerállványt a szükséges mértékben odébb helyezzük. Amennyiben a pont a meghosszabbított állótengelyhez közel van, akkor a talpcsavarok forgatásával gondosan megirányozzuk a pontot, így elérjük azt, hogy az állótengely meghosszabbítása a ponton fog keresztül menni.

Az állótengely függőlegessé tételét két lépésben hajtjuk végre. Először a szelencés libella buborékját állítjuk középre a műszerlábak hosszának változtatásával. Abban az esetben, ha a szelencés libella beállítása után az állótengely kismértékben elmozdulna a ponttól, akkor az összekötőcsavart óvatosan meglazítjuk, és a műszert az állvány fejezetén óvatosan eltoljuk úgy, hogy a vetítő irányvonala a pont képével essen egybe, és az összekötőcsavart újra megszorítjuk. A műszert a fejezeten csak eltolni szabad, forgatni nem. Ezzel a művelettel az állótengelyt közelítőleg függőlegessé tettük. Ezután következik az állótengely pontos függőlegessé tétele.

Az állótengely függőlegessé tételét a csöves libella segítségével határozzuk meg, két, egymásra merőleges irányban. Ezeket az irányokat első és második főirányoknak nevezzük (4.16. ábra).

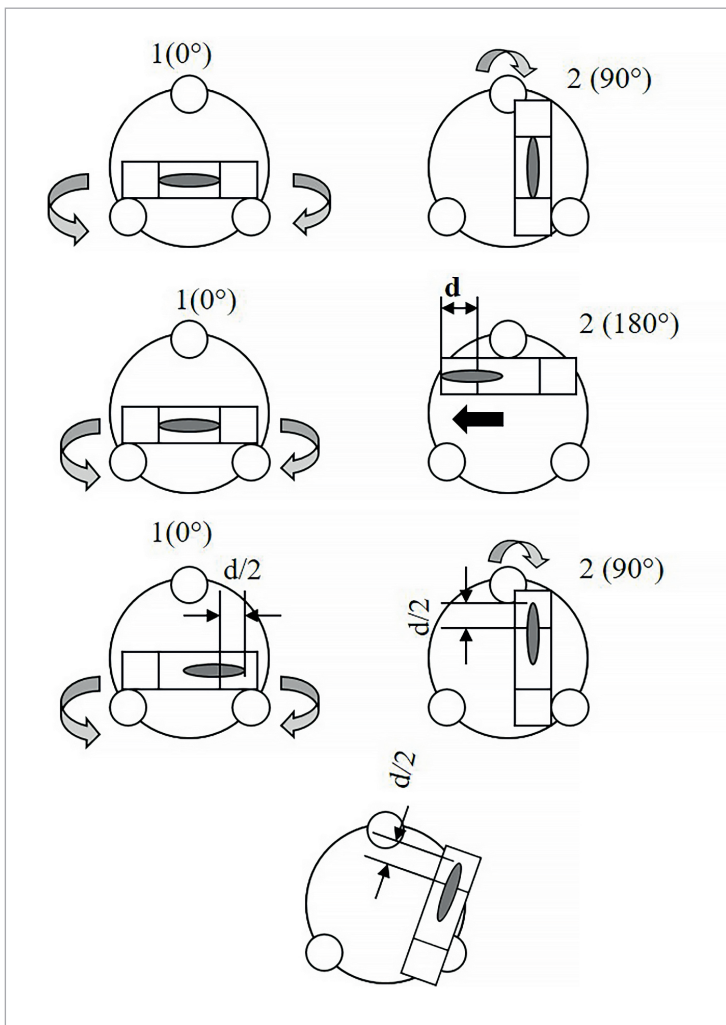


4.16. ábra: Az állótengely függőlegessé tételének főirányai (a szerző szerkesztése)

Először a libella tengelyét párhuzamossá tesszük két – tetszőlegesen kiválasztott – talpcsavar által meghatározott iránnyal, az I. főiránnyal. A két talpcsavar azonos mértékű, de ellentétes értelmű forgatásával a libella buborékját középre igazítjuk. Ezután az alhidádét 90° -kal elforgatjuk úgy, hogy a libella tengelye a harmadik talpcsavar irányába, a II. főirányba essen. Ebben a helyzetben is középre állítjuk a libella buborékját a harmadik talpcsavar forgatásával. Majd visszaforgatjuk az alhidádét az I. főirányba, és újból, finoman beállítjuk a libella buborékját a két talpcsavarral.

Ezt követően a libellát 180° -kal átforgatjuk az állótengely körül, és leolvassuk a buborékvégnek a helyzetét (nagyságát, irányát). Figyeljünk arra, hogy az átforgatás után melyik irányban van az eltérés! Az alhidádét visszaforgatjuk az I. főirányba, és itt a libella buborékját a leolvasott eltérés felére állítjuk, majd ezt a műveletet végrehajtjuk a II. főirányban is (4.17. ábra).

Végül az alhidádé lassú körbeforgatásával ellenőrizzük a buborék helyzetét. Helyes végrehajtás esetén a buborék nem tér ki a számított helyzetéből.



4.17. ábra: Az állótengely függőlegessé tételének lépései (a szerző szerkesztése)

Miután az állótengely pontos függőlegessé tétele megtörtént, ellenőrizzük, hogy az állótengely meghosszabbítása keresztülmegy-e a ponton, vagy sem. Ha az állótengely kismértékben elmozdulna a pontról, akkor az összekötőcsavart óvatosan meglazítjuk, és a műszert az állvány fejezetén óvatosan eltoljuk úgy, hogy az állótengely meghosszabbítása a pont képével essen egybe, és az összekötőcsavart újra megszorítjuk. A műszert a fejezetén csak eltolni szabad, forgatni nem.

4.2.4. A szögmérés hibaforrásai és kiküszöbölésük

Méréseinket hibák terhelik, ennek okait az alábbiak szerint csoportosítjuk:

4.2.4.1. A műszer gyártási és szerelési hibái

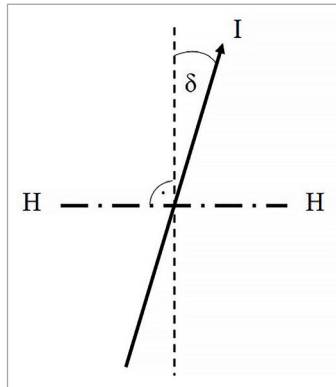
Véletlen jellegű hibák

Ilyen például az egyes kis alkatrészek elmozdulásai, a mozgó alkatrészek holtjátéka. A véletlen jellegű hibákat helyes műszerkezeléssel és jól megválasztott mérési eljárással kell a minimumra csökkenteni.

Szabályos hibák

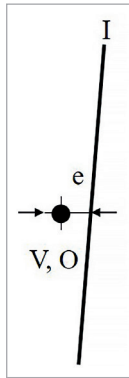
A műszerhibák közül csak azokkal a mértékadó szabályos hibákkal foglalkozunk, amelyek hatása a leolvasóképeességet lényegesen meghaladhatja.

1. *Kollimációhiba:* az irányvonal nem merőleges a fekvőtengelyre (4.18. ábra). A hatás két távcsőállásban végzett méréssel kiküszöbölhető.



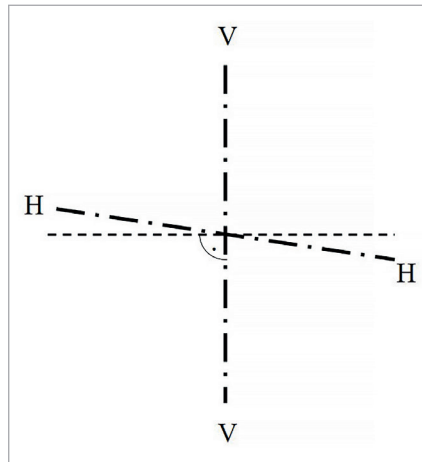
4.18. ábra: Kollimációhiba (a szerző szerkesztése)

2. *Irányvonal külpontossága vagy horizontális távcsőkülpontosság:* az irányvonal külpontos az állótengelyhez képest, azaz az irányvonal és az állótengely kitérő egyenesek (4.19. ábra). A hatás két távcsőállásban végzett méréssel kiküszöbölhető.



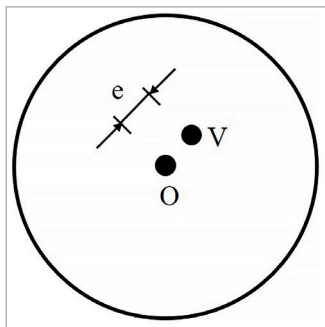
4.19. ábra: Irányvonal külpontossága (a szerző szerkesztése)

3. *Fekvőtengely ferdesége*: az állótengelyre nem merőleges a fekvőtengely (4.20. ábra). A hatás két távcsőállásban végzett méréssel kiküszöbölhető.



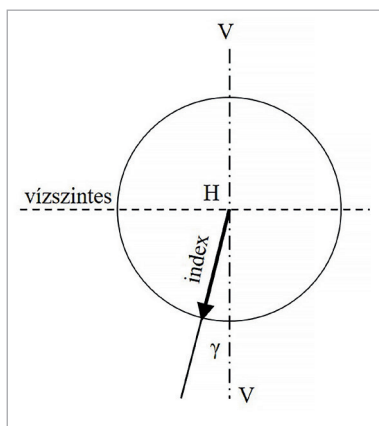
4.20. ábra: Fekvőtengely ferdesége (a szerző szerkesztése)

4. *Vízszintes kör osztásközéppontjának külpontossága* az állótengelyhez képest (4.21. ábra), azaz a limbusz kör középpontja nincs az állótengelyen. Veszélyes hibaforrás: egyetlen mikronnyi külpontosság is több szögmásodpercnyi hibát okozhat. A hatás kiküszöbölésére vagy két diametrál helyzetű indexet használunk, és ekkor a leolvasások középértékéből már egy távcsőállásban végzett mérés esetén is kiesik a hiba, vagy egy index esetén a hatást két távcsőállásban végzett méréssel kiküszöböljük ki.



4.21. ábra: Vízszintes kör osztásközéppontjának külpontossága (a szerző szerkesztése)

5. *Vízszintes kör osztáshibáinak* hatása többfordulós méréssel kiküszöbölhető. A mérést úgy hajtjuk végre, hogy a limbuszt minden forduló előtt $180/n$ értékkel elforgatjuk, ahol n a fordulók száma.
6. *Indexhiba*: A magassági kör rögzítési hibájából, valamint az indexeket beállító szerkezet igazítási hibájából (a kompenzálóegység beállta után az index nem vízszintes, illetve nem függőleges) származik. Ilyenkor a leolvasott magassági szögértéket egy szabályos hiba terheli. A hiba hatása két távcsőállásban végzett méréssel kiküszöbölhető (4.22. ábra).



4.22. ábra: Indexhiba (a szerző szerkesztése)

7. *Vertikális távcsőkülpontosság*: az irányvonal és a fekvőtengely kitérő egyenesek (nem esnek egy síkba). A hiba hatása két távcsőállásban végzett méréssel kiküszöbölhető.

4.2.4.2. A műszer felállítási hibái

Pontraállási hibáról akkor beszélünk, ha a függőlegessé tett állótengely meghosszabbítása nem megy át a mérendő szög csúcsán. Hatása nem küszöbölhető ki két távcsőállásban végzett méréssel, ezért a pontra állást gondosan kell elvégezni.

Az állótengely ferdeségének hatása sem küszöbölhető ki két távcsőállásban végzett méréssel, ezért mérés előtt az állótengelyt gondosan függőlegessé kell tenni. Az állótengely ferdeségének csak a fekvőtengely irányába eső vetülete okoz hibát. Ezt az összetevőt a csöves (alhidádé-) libella kimutatja, ezért mérés közben többször ellenőrizni kell a buborék helyzetét.

4.2.4.3. A mérés külső körülményeinek hatásából származó hibák

A limbusz mérés közbeni elmozdulása

Mérés közben a limbusznak a műszerrel együtt mozdulatlanul kell lennie. A limbusz elmozdulása vagy a műszertalpnak, vagy a műszerállványnak az elmozdulása miatt következhet be. Ha a műszerláb saruit a talajba nyomjuk be, akkor a talaj rugalmas visszahatása is okozhatja a fejezet elmozdulását. A műszerállvány fejezetének elmozdulását okozhatja még a talajnak az észlelő mérés közbeni mozgása miatti változó terhelése.

A teodolit műszertalpának kedvezőtlen elmozdulása legtöbbször az egyoldalú hőmérséklet-változások hatására következik be. A limbusz tengelye körüli elfordulása közvetlenül szög-hibához vezet. A limbusz a síkjára merőleges tengely körüli elfordulását állványelcsavarodásnak nevezzük.

Például egy 10 cm átmérőjű limbusznál az elcsavarodás miatt a limbusz kerületének egy pontja 0,001 mm-rel (egy mikronnal) fordul el, az a középponti szögben 4" eltérést okoz.

A limbusz parány mértékű elmozdulása, ha teljesen nem is szüntethető meg, jelentősen csökkenthető, amennyiben az alábbiakat betartjuk:

- a teodolitot napsütéses időben műszerernyővel védjük;
- a saruk földbe nyomása után a műszerállványt enyhén megrázzuk, hogy a szerkezetben keletkezett egyenlőtlen feszültségek részben feloldódjanak;
- a mérést egyenletes sebességgel végezzük, és a mérés nem tart sokáig;
- az irányzásokat ellentétes sorrendben megismételjük.

Az állványelcsavarodási hiba hatása egyetlen távcsőállásban végzett méréssel is megállapítható, ha horizontzárást hajtunk végre, azaz a legelőször mért irányt utolsó irányként újramérjük. Számításkor a mutatkozó eltérést a sorozat irányaira egyenletesen osztjuk el. Azonban ha más hibahatások kiküszöbölése miatt a mérést két távcsőállásban végezzük, az állványelcsavarodás hatása oly módon küszöbölhető ki, hogy a második távcsőállásban az irányokat fordított sorrendben mérjük.

A levegő fizikai állapota

Ha a levegőben por vagy pára van, az irányzott pont képe elmosódik, és az irányzás pontatlanná válik.

A különböző sűrűségű levegőrétegek törésmutatója más és más, ezért a fénysugár egy térbeli görbe vonalon terjed. Ezt a jelenséget refrakciónak nevezzük. A refrakció időben változó jelenség. A refrakció időbeni változása szerint megkülönböztetünk rövid periódusú részt és hosszabb periódusú (perc nagyságot is elérő) részt. A rövid periódusú jelenség, ami a melegebb és hidegebb

levegőrészecskék véletlenszerű helycseréje, a *légrezgés*. A hosszabb periódusú jelenség a *léglengés*, amely egy-egy nagyobb, felmelegedett légtömeg felemelkedését jelenti.

A légrezgés hatására a tárgyak képe is rezgőmozgást végez. Ez a jelenség főleg a napos délelőtti és a kora délutáni órák között fordul elő, és a déli órákban a legnagyobb. Az irányzás ilyen körülmények között bizonytalan. Légrezgéses időben csak akkor szabad mérni, ha a légrezgés által okozott irányzási bizonytalanság kisebb a szögmérésben megkívánt pontosságnál.

A léglengés veszélyesebb hibaforrás, mert a kép mozgása nem állapítható meg olyan könnyen. Léglengéskor a kép látszólag nyugodt, és csak nagyobb időközökben végez lassú ide-oda mozgást. Ez a jelenség általában a napkelte és a napnyugta körüli időben, továbbá a páralecsapódással egy időben lép fel. Ilyen időben vízszintes szögmérést végezni nem szabad.

A refrakció időbeli változásának van 24 órás periódusa is. A refrakció ezen szabályos részének a vízszintes szög mérésére kifejtett hatását nevezzük oldalrefrakciónak. Az alsógeodéziában a méréseknél az oldalrefrakció értéke kicsi, hatása általában elhanyagolható. Az oldalrefrakció hatása a mérnöki gyakorlatban csak akkor számottevő, ha az irányvonal erősen felmelegedett felület közelében halad tartósan. Az ilyen helyzeteket kerülni kell.

4.2.4.4. Az észlelő látási élessége és gyakorlottsága

Az észlelő figyelmetlensége, fáradtsága miatt az észleléshez szükséges koncentráció hiánya durva hibákat eredményezhet. Durva hibát követünk el akkor, ha például elazonosítás történik, azaz nem azt a pontot irányozzuk, amelyiket mérni kell.

A gondos munka mellett is elkövethetünk véletlenül durva hibákat, mivel gyakran huzamos ideig, sokszor nehéz körülmények között kell mérést végeznünk. A durva hibák elkerülésére nem lehet semmilyen módszert adni. Lehetőség szerint végezzünk főls méréseket, amivel a durva hibák kiszűrhetők.

Az észlelővel kapcsolatos szubjektív körülmények mellett a hibák létrejöttének objektív okai is vannak. Például jelentős irányzási hibákat eredményez az, hogy az irányzott jelekre különbözőképpen esik a fény.

4.3. A vízszintes szögmérés módszerei

Ahhoz, hogy a teodolittal méréseket végezhesünk, a teodolitot pont fölé kell állítani úgy, hogy a függőleges állótengely meghosszabbítása a mérendő szög csúcán menjen keresztül. A teodolit helyes felállítását, annak gyakorlati megoldását a gyakorlatok alkalmával sajátítjuk el, ahogy az irányzások végrehajtását is.

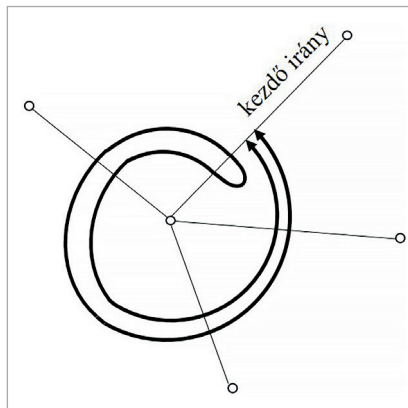
A továbbiakban olyan vízszintes és magassági szögmérési módszereket mutatunk be, amelyek az előzőekben tárgyalt hibák hatásainak kiküszöbölését, csökkentését biztosítják, és megbízható szögértékeket eredményeznek.

A vízszintes szögméréssel az egy pontból kiágazó irányok vízszintes vetületének egymáshoz viszonyított helyzetét határozzuk meg. A meghatározás két elv szerint történik. Az egyiknél több irányt egyszerre vonunk be a mérésbe, a másikonál egyszerre csak két-két irányt mérünk. Ennek megfelelően a vízszintes szögmérésnek két alaptípusa van, az első eset szerinti meghatározás az iránymérés, a második eset szerinti a tulajdonképpeni szögmérés.

4.3.1. Az iránymérés

Kettőnél több irány vízszintes helyzetének meghatározására általánosan elterjedt módszer az iránymérés. A mérésbe az összes irányt bevonjuk. Az iránymérés végrehajtása során a távcsővel először az első távcsőállásban az óramutató járásával megegyező értelemben irányozzuk a pontokat, és a leolvasásokat jegyzőkönyvezzük. A távcső áthajtása és az alhidádé átforgatása után fordított sorrendben, visszafelé újra beirányozzuk a pontokat, és a leolvasott irányértékeket jegyzőkönyvezzük. A leolvasásokkal minden egyes irányra kiszámítjuk az irányértékeket úgy, hogy a leolvasások számtani középértékét vesszük oly módon, hogy megtartjuk az első távcsőbeli fok- és percértékeket, és hozzáadjuk a másodpercek számtani átlagát, amennyiben a percértékek azonosak. Abban az esetben, ha a percértékek nem azonosak, azzá tesszük őket a perc másodperccé való váltásával.

Az irányok két távcsőállásban történő végigmérését egy fordulónak nevezzük.



4.23. ábra: Iránymérés (a szerző szerkesztése)

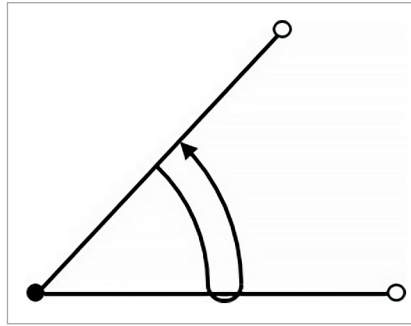
Amikor a kezdőirányt mindkét távcsőállásba ismét megirányozzuk, akkor horizontzárásról beszélünk (4.23. ábra). A limbusz mozdulatlanságát horizontzárással ellenőrizzük, illetve megállapítjuk az állvány elcsavarodásának a mértékét. Ez az érték általában nem haladhatja meg a leolvasóképeség háromszorosát. Amennyiben ez nem valósul meg, csökkenteni kell a mérési időt, például az irányok számának csökkentésével.

Ha egy irány sorozatot többször végigmérünk, többfordulós mérésről beszélünk. A pontosság növelésének érdekében a mérést több fordulóban végezzük, és az egyes fordulók között megismételjük a pontra állást és az állótengely függőlegessé tételét.

Ebben az esetben minden fordulóban külön-külön a kezdő irányértéket sorra levonjuk a többi irány értékéből. Az így kapott irányértéket nullára forgatott irányértéknek nevezzük. Magát a számítási műveletet az irány sorozat nullára forgatásának nevezzük. Ez megkönnyíti az egyes fordulók méréséből ugyanarra az irányra vonatkozó irányértékek számtani közepének meghatározását, és lehetővé teszi a mérésben előforduló, a megengedettnél nagyobb eltérések egyszerű megállapítását.

4.3.2. A tulajdonképpeni szögmérés

A tulajdonképpeni szögmérésnél egyszerre csak két-két irányt vonunk be a mérésbe. A távcsővel az első távcsőállásban először a bal oldali pontot irányozzuk, leolvassuk, majd a jobb oldali pontot, és itt is elvégezzük a leolvasást. Majd áthajtjuk a távcsövet, átforgatjuk az alhidádét, és fordított sorrendben visszafelé újra beirányozzuk a pontokat, és leolvassuk (4.24. ábra).

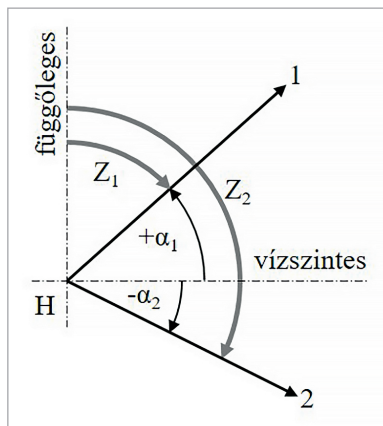


4.24. ábra: Szögmérés két távcsőállásban (a szerző szerkesztése)

4.4. A magassági szögmérésről általában

Egy irány magassági szögén azt a szöget értjük, amelyet a szóban forgó irány a vízszintes vetületével bezár, zenitszögén pedig az irány függőlegessel bezárt szögét (4.25. ábra).

$$Z + \alpha = 90^\circ$$



4.25. ábra: A magassági szög (a szerző szerkesztése)

A magassági szög $0-180^\circ$ közötti előjeles mennyiség, a vízszintestől lefelé negatív, felfelé pozitív érték. A zenitszög $0-360^\circ$, és előjele mindig pozitív.

A 4.25. ábra alapján: $\alpha = 90^\circ - Z$ és $Z = 90^\circ - \alpha$

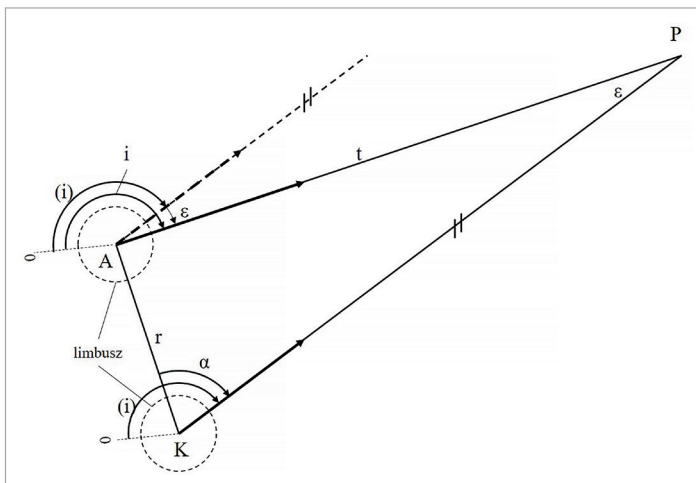
A magassági szögmérést a következő módon végezzük:

1. A távcsővel az I. távcsőállásban a szokott módon beirányozzuk a pontot.
2. Leolvassuk a magassági körön (l_I).
3. A távcsövet áthajtjuk, és az alhidádét átforgatjuk (II. távcsőállás).
4. Újra beirányozzuk a pontot, és elvégezzük a 2. lépést. Megkapjuk az l_{II} értéket.
5. Összeadjuk a két leolvasást. Ha 360° -ból ezt a szöget levonjuk, megkapjuk az indexhiba kétszeresét: $\delta = 360^\circ - (l_I + l_{II})$
6. Számítjuk az indexhiba nélküli zenitösszeg kétszeresét az $(l_I + 360^\circ) - l_{II}$ összefüggéssel.
7. Képezzük ennek az értéknek a felét, és megkapjuk az indexhibától mentes zenitszöget.
8. Ellenőrizzük a számítás jóságát a $Z = l_I + \frac{\delta}{2}$ kifejezéssel.

4.5. Külpontos szögmérés

Külpontos pontra állás: van olyan eset, amikor a külpontos pontra állás tudatos, mert a megmért szög csúcspontján valamilyen okból nem tudunk vagy nem akarunk a teodolittal felállni. Ilyenkor az A (központ) pont helyett a K (külpont) ponton állítjuk fel a műszert, majd megmérjük AK távolságot (r) és az α szöget (4.26. ábra). Ezáltal biztosítjuk, hogy a mérési eredményeket az A központra át tudjuk számítani (redukálni): $i = (i) + \varepsilon$, ahol a központosítási redukció:

$$\varepsilon'' = \arcsin \frac{r}{t} \cdot \sin \alpha$$



4.26. ábra: Külpontos pontra állás központosítása (a szerző szerkesztése)

ahol r – a külpontosság lineáris értéke

t – a megírányzott pont vízszintes távolsága

α – a külpontos műszerállásponttól a központra menő irány és a megírányzott pontra menő irány által bezárt szög

ε – központosítási javítás

A külpontossági elemek közül az r vízszintes távolság, amelyet milliméter-pontossággal kell megmérni. Az α szöget általában elegendő 1 szögperc pontossággal megmérni. A t távolságot rendszerint elegendő mérőhelyes vázlatról lemérni.

Ha a külpontos pontra állás nem tudatos, akkor az a pontra állás hibája. Ha az előbbi képletben az α szöget 90° -nak vesszük, akkor a pontraállási hiba maximális értékét kapjuk.

Szemléltetésül nézzük az alábbi táblázatot, amelyben különböző távolságokhoz változó r értékekkel kiszámítottuk a maximális irányhibát.

4.1. táblázat: Külpontos pontra állás okozta hibák (a szerző szerkesztése)

A pontra állás hibája (r)	t (m)					
	100	500	1000	2000	5000	10000
1 mm	2,1"	0,4"	0,2"	0,1"	0	0
5 mm	10,3"	2,1"	1,0"	0,5"	0,2"	0,1"
10 mm	20,6"	4,1"	2,1"	1,0"	0,4"	0,2"

A fenti táblázat adatai mutatják, hogy a pontra állás hibája főleg rövid irányhosszak esetén veszélyes. Minél messzebb van a mérendő pont, annál kisebb hibát eredményez a szögmérésben.

4.6. A vízszintes szögmérés megbízhatósága

A vízszintes szögmérés megbízhatósága függ a műszertől, az alkalmazott módszertől, a műszer és a pontjelző központos elhelyezésétől, az észlelőtől, a levegő állapotától, a pontok megvilágítottaságától stb.

A mérési eredményekben maradó hibák nagyságáról képet alkothatunk magunknak, ha például egy háromszög belső szögeit ismételten megmérjük. A belső szögek hibátlan (valódi) értékét ugyanis ismerjük. Így a mérési eredményből számított szögösszegnek a 180° -tól való eltérése, az úgynevezett *szögzáróhiba* valódi hiba.

Valamely adott műszer esetén ugyanazon iránynak két távcsőállásban mért irányértékének a sokszor ismételt meghatározásával kaphatunk eredményt a műszerrel elérhető megbízhatóságra, az *irányérték középhibájára*.

$$\mu_i = \sqrt{\frac{v^2}{n-1}}$$

ahol v – az egyes mérési eredmények átlagtól való eltérése,
 n – a mérések száma.

A két irány által bezárt szög középhibája pedig, a hibaterjedés törvényéből

$$\mu_{sz} = \sqrt{\mu_i^2 + \mu_i^2} = \sqrt{2} \cdot \mu_i$$

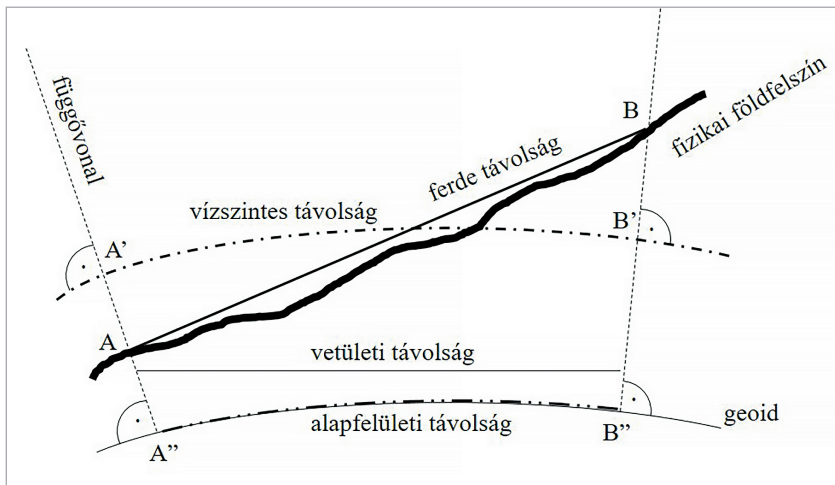
5. Távolságmeghatározás

5.1. A távolságmeghatározásról általában

5.1.1. Távolságok meghatározása

A gyakorlati geodézia vízszintes méréseinél két pont távolságán a pontok alapfelületi megfelelői közötti legrövidebb felületi vonal hosszát értjük, és alapfelületi távolságnak nevezzük (az 5.1. ábrán az $A''B''$ ívhosszúság). Az alapfelületet a tengerszint magasságában vesszük fel, így azt általában nem tudjuk megmérni. Méréseinket a terepen végezzük, ahol a két pontot összekötő egyenest ferde távolságnak nevezzük (az 5.1. ábrán az AB egyenes). A ferde távolságot át kell számítani (redukálni) a vízszintesre, majd az alapfelületre. Az átszámítást két lépésben végezzük. Első lépésként felveszünk egy olyan szintfelületet, amelyik a mérendő pontok közepes magasságában helyezkedik el, és képezzük ezen a szintfelületen az A és B tereppontok természetes vetületeit (az 5.1. ábrán az A' és B' pontok). Ezt az ívhosszúságot vízszintes távolságnak nevezzük.

Majd ezt a vízszintes távolságot számítjuk át a tengerszint magasságában elhelyezkedő szintfelületre (redukáljuk az alapfelületre).



5.1. ábra: Távolságfogalmak (a szerző szerkesztése)

A mérési eljárások közvetlenül a *ferde távolságot* adják, ebből redukálással vezetjük le a *vízszintes távolságot*, majd további redukálással az *alapfelületi távolságot*. Vannak azonban olyan távolságmeghatározási eljárások is, amelyek már első lépésben a vízszintes távolságot eredményezik. Ezeknél tehát a redukálás első lépése elmarad.

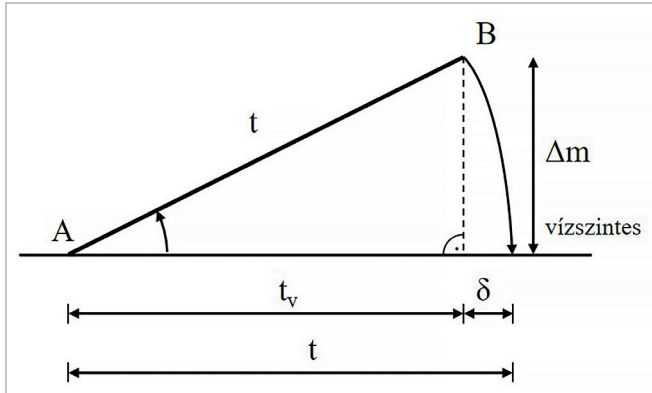
A számításokat az alapfelület helyett jóval egyszerűbb az úgynevezett vetületi síkon elvégezni. Az alapfelületi távolság redukciója a vetületi síkba azt jelenti, hogy a távolság számértékét megszorozzuk egy, a mérés helyére kiszámítható és az egységhez közeli hossztorzulási tényezővel.

5.1.2. A ferde távolság redukálása a vízszintesre

Abban az esetben, ha az A és B pontok közötti terep nem vízszintes, és a ferde távolságot mérjük, ami a vízszintessel valamilyen α szöget zár be, a t_v vízszintes távolságot a

$$t_v = t + \delta_v$$

összefüggéssel számítjuk (5.2. ábra).



5.2. ábra: Ferde távolság redukálása vízszintesre (a szerző szerkesztése)

ahol δ_v – a vízszintesre való redukció, tehát

$$\delta_v = t_v - t$$

$$\delta_v = t \cdot \cos \alpha - t = t \cdot (\cos \alpha - 1) = -t \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Amikor nem α szöget mérjük, hanem valamilyen más módon határozzuk meg a két pont közötti magasságkülönbséget (Δm), akkor a fenti képletben $\cos \alpha$ kifejezhető a magasságkülönbséggel:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \text{és} \quad \sin \alpha = \frac{\Delta m}{t}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{\Delta m^2}{t^2}}$$

Taylor-sorba fejtett alakja:

$$\sqrt{1 - \frac{\Delta m^2}{t^2}} = 1 - \frac{\Delta m^2}{2! t^2} - \frac{\Delta m^4}{4! t^4} - \frac{\Delta m^6}{6! t^6} - \dots$$

Ebből a sorba fejtett alakból csak az első két tagot vesszük figyelembe, mert a többi már elhanyagolhatóan kicsi. Ebből adódóan:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\Delta m^2}{2t^2}$$

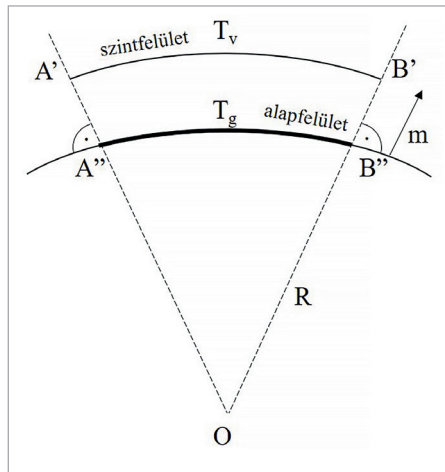
$$\delta_v = -t \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta m^2}{2t^2} \right) \right)$$

$$\delta_v = -\frac{\Delta m^2}{2t}$$

5.1.3. A vízszintes távolság redukálása az alapfelületre

A vízszintes távolságnak az alapfelületre való redukálásánál teljesen mindegy, hogyan kaptuk meg a vízszintes távolságot. Az 5.3. ábra alapján felírhatjuk a következő arányosságot:

$$t_g : t_v = R : (R + m)$$



5.3. ábra: Redukálás az alapfelületre (a szerző szerkesztése)

Rendezve:

$$t_g = t_v \cdot \frac{R}{R + m} = t_v \cdot \frac{R + m - m}{R + m} = t_v \cdot \left(1 - \frac{m}{R + m} \right)$$

Mivel m (tengerszint feletti magasság) a Föld sugarához (R -hez) képest elhanyagolhatóan kicsi:

$$t_g = t_v \cdot \left(1 - \frac{m}{R + m} \right) \approx t_v \cdot \left(1 - \frac{m}{R} \right) = t_v - t_v \cdot \frac{m}{R}$$

A tengerszintre történő redukció mértéke:

$$\delta_g = -t_v \cdot \frac{m}{R}$$

Az alapfelületi távolságot a vízszintes távolságból és a tengerszintre történő redukcióból számítjuk:

$$t_g = t_v + \delta_g$$

Gyakorlatilag a terep mindig az alapfelület felett van, tehát m pozitív, ezért az úgynevezett tengerszintre való redukciót (δ_g) mindig le kell vonni.

Sok esetben a tengerszinten történő redukció mértéke kisebb, mint a méréstől megkívánt megbízhatóság, ezért ilyen esetekben a vízszintes távolságot tekintjük alapfelületi távolságnak. Tájékoztatásul megemlítjük, hogy a 100 m tengerszint feletti magasságban elhelyezkedő 100 m-es távolság alapfelületi redukciója $-1,6$ mm.

5.1.4. Távolságmérési eljárások

A távolságokat közvetlenül vagy közvetve határozhatjuk meg.

A közvetlen távolságmeghatározást hosszmérésnek nevezzük. Ekkor egy ismert hosszúságú mérőeszközt (léc, szalag) fektetünk ismételten a távolság egyenesére.

A távolság közvetett meghatározását távmérésnek, eszközeit távmérőknek nevezzük. A távolsággal geometriai vagy fizikai kapcsolatban álló mennyiségeket mérünk (szögmérés, optikai, fizikai mérés), és képletekkel számítjuk ki a távolságot.

5.2. Hosszmérés

A ma már ritkábban előforduló távolságmeghatározás a hosszmérés, eszköze a mérőszalag. Méréskor összehasonlítjuk a mérendő távolságot a mérőszalag hosszával. A geodéziában használatos mérőszalagok általában acélból készülnek. Két csoportra oszthatók, kézi szalagokra (5.4. ábra) és mezei szalagokra. A mezei szalagok 1,5-2 cm szélesek, általában 20 vagy 50 m hosszúak. A kézi szalagok 20, 30, 50 m-es hosszúságban készülnek, cm-osztással, az első és utolsó deciméter általában mm-osztással. A kézi szalagokat általában a hosszuknál rövidebb távolságok megmérésére használjuk.



5.4. ábra: Kézi szalag [8]

A mérőszalag hosszát komparálással határozzuk meg. A komparálás sík és vízszintes terepen történik. A szalag névleges hosszának (20 m, 50 m) megfelelő távolságban milliméter-beosztású fémlemezeket rögzítünk. A két beosztás zérussal jelölt vonása közötti h távolságot előzetesen meg kell mérni valamilyen pontosabb mérőeszközzel. Komparáláskor a mérőszalag végvonalainál leolvassuk a bal d_b , majd a jobb d_j oldali értékeket. Ezeket előjelhelyesen összegezzük. A mérőszalag hosszának eltérése az alapvonal hosszától: $d = d_b + d_j$. (A d_b és a d_j leolvasások előjele a zérusvonalasoktól „kifelé” pozitív, „befelé” negatív.) Ahhoz, hogy pontos eredményt kapjunk, az eltérés értékének meghatározására legalább öt, de legfeljebb tíz (n darab) mérést végzünk, majd a kapott értékek számtani középértékéből ($\Delta l = \frac{\sum d_i}{n}$) számítjuk ki a mérőszalag tényleges (komparált) hosszát:

$$l_t = h + \Delta l = h + \frac{\sum d_i}{n}$$

A mérőszalag hossza függ a szalagra ható húzóerő nagyságától és a szalag hőmérsékletétől. Komparáláskor és hossz mérészkor egyforma (általában 1 N) erővel kell feszíteni a szalagot. A szalag hőmérsékletét mind komparáláskor (t_k), mind hossz mérészkor (t_m) meg kell mérni. A mérőszalag komparálási javítása a tényleges és a névleges hossz különbsége:

$$\delta_k = l_t - l_n$$

A mérőszalag hőmérsékleti javítása:

$$\delta_t = \alpha \cdot (t_m - t_k) \cdot l_n$$

ahol α – a mérőszalag anyagának hőtágulási együtthatója.

A mérőszalag valódi hossza:

$$l = l_n + \delta_k + \delta_t$$

5.3. Távmérés

A közvetett távolságmeghatározás kétféle lehet:

- geometriai,
- fizikai távolságmeghatározás.

A geometriai távolságmeghatározást már nem használjuk.

5.3.1. Fizikai távmérés

A fizikai távmérészkor a mérendő távolságot valamilyen fizikai jelenség felhasználásával és fizikai mennyiségek megmérésével határozzuk meg.

A távméréshez legtöbbször az elektromágneses sugárzást használják fel, amelynek igen széles hullámhossztartományai közül a geodézia csak két szűk sávot használ:

- a rádióhullámokat, amelyeknek centiméteres a hullámhossza. Ezt a módszert nevezzük rádiótávmérésnek (mikrohullámú távmérés);

- a látható fényt, amelynek mikrométeres a hullámhossza, vagy az infravörös tartományba eső hullámokat. Ez a módszer az elektrooptikai távmérés (fénytávmérés).

A távmérés módszerei közül a geodéziai gyakorlatban elterjedtebb modulált fényt felhasználó elektrooptikai távmérés kérdéseivel foglalkozunk.

A moduláció annyit jelent, hogy a fényre vagy infravörös sugárzásra mint vivőhullámra valamilyen mérőjelet „ültetünk”. Ennek a mérőjelnek a „vizsgálata” teszi lehetővé a távolság meghatározását.

A mérendő távolság egyik végpontján egy olyan műszer áll, amelyben az adó- és a vevőegység van, a másik végponton a visszaverő berendezés, amely nem más, mint egy olyan üvegprizma, amely egy üvegekocka testátlóra merőlegesen lemetezett sarka. A prizmáról a fénysugár a beesés irányába verődik vissza.

A modulált fény a mérendő távolság kétszeresét futja be. A műszerbe visszaérkező modulált fényről leválasztják a mérőjelet: ezt nevezzük demodulációnak. A moduláló és a demodulált jelet összehasonlítják. A demodulált jel a modulált jelhez képest időkésséssel keletkezik (a fázismérési távmérésnél fáziskésséssel). A távmérés feladata lényegében ennek az idő- vagy fáziskésségnek a meghatározása. A mérőjel a távolságot kétszer futja be, oda és vissza irányban. Ezzel az úgynevezett kétutas módszerrel közvetlenül a futási idő kétszerese határozható meg. A kibocsátott jel gyengül, egyrészt mivel a mérendő távolság kétszeresét futja be, másrészt a visszatérítő jel okozta energiacsökkenés miatt. Ennek a kétutas módszernek a hatótávolsága korlátozott.

Ha a mérőjel egyetlen impulzus, akkor megmérjük az impulzus úgynevezett futási idejét, vagyis azt az időtartamot, amely alatt az impulzus oda-vissza befutja a mérendő távolságot. Ez az időmérési távmérés.

Ha a mérőjel periodikusan változó folyamatos szinuszjel, akkor megmérjük a moduláló és a demodulált jel rezgésállapotának (fázisának) különbségét. Ez a fázismérési távmérés.

5.3.1.1. Időmérési távmérés

Az időmérési távmérésnél a mérőjel egyetlen impulzus. A műszer által kibocsátott elektromágneses hullám a mérendő távolság másik végpontján elhelyezett berendezésről visszaverődik, és visszajut a műszerbe. A kibocsátás és a visszaérkezés között eltelt idő, τ megmérésevel a távolság kiszámítható:

$$2D = \tau \cdot v$$

$$D = \frac{v}{2} \cdot \tau$$

ahol v – a fény ismertnek tekintett terjedési sebessége a légkörben.

A fenti képletet az *időmérési távmérés alapképletének* nevezzük.

A fény valóságos terjedési sebessége a levegő mindenkori hőmérsékletétől és nyomásától függ. A távmérő számológépe a v sebességnek valamilyen hőmérsékletre és légnyomásra kiszámított nagyságát használja. Az eltérést utólag, meteorológiai javítás számításával vesszük figyelembe.

Az időmérési távmérés elvén működő műszereknél a mérőjelnek olyan nagy az energiasűrűsége, hogy 100-200 méteres távolságig a céltárgyról visszaverődő jelmenyiség is elég; 300-400 méteres távolságig pedig visszaverő berendezésként fólia is használható.

5.3.1.2. Fázismérési távmérés

A fázismérési távmérésnél a mérőjel egy periodikusan változó szinuszos jel. Ez a távmérési módszer azon alapszik, hogy a megméréndő távolság mindkét végpontján meg kell mérnünk a kiinduló állapothoz tartozó rezgésállapot-változást. A megmért távolság két részből tevődik össze: a távolság befutásakor lejátszódott teljes fázisciklusok számából és a megmért fáziskülönbségből. Ha ezt a számot megszorozzuk egyetlen fázisciklus lejátszódási idejével, akkor megkapjuk a futási időt, ezzel ezt a módszert visszavezettük az időmérési távmérésre.

A távolság meghatározásához a mérőjel kétszer futja be a távolságot. Ha a *fény terjedési sebessége a légkörben v , a frekvencia f* (az időegység alatt előállított mérőjel-periódusok száma), akkor egyetlen ciklus alatt a fény

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

távolságot tesz meg. Ez a távolság a *fény hullámhossza*. A futási idő alatt N darab egész hullám fér el a megméréndő távolság kétszeresén. Az egész számú fázisciklusok mellett meg kell még határozni a maradék távolságot is, ami az egész fázisciklusok után fennmaradó csonka ciklus. A csonka ciklus hossza rövidebb, mint egy egész. Jelöljük D_{csonka} szimbólummal a maradék távolságot:

$$\frac{D_{csonka}}{\lambda} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

ahol $\Delta\varphi$ – a kilépő (a moduláló) és a visszaérkező (a demodulált) jel fáziskülönbsége.

A fény a megméréndő távolság kétszeresét futja be:

$$2D = N \cdot \lambda + D_{csonka}$$

azaz

$$D = N \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{D_{csonka}}{2}$$

$$D = N \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Ez a *fázismérési távmérés alapképlete*.

A fenti alapképletben szerepelő $\lambda/2$ hosszát a távmérés léptékének nevezzük, amely függ az f frekvenciától, valamint az ismertnek tekintett v terjedési sebességtől.

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f}$$

A fázismérési távmérésnél a távolság kétféleképpen határozható meg:

- Állandó mérőfrekvencia módszere: a mérőhullám hossza az időben nem változik, és $\Delta\varphi$ megméréssel határozzuk meg a maradék távolságot.
- Változtatható mérőfrekvencia módszere: a hullámhossz változtatásával a maradék távolságot nullává tesszük.

Az *állandó mérőfrekvencia* elvén működő távmérésnél a fáziskülönbség mérését az időmérésre vezetjük vissza. A fázismérő a moduláló és a demodulált jel azonos fázishelyzetű pontjainak a megjelenése közötti időtartamot méri impulzusszámlálással. A műszerben két számláló működik: az egyik tartalma az egész fázisciklusok számával növekszik, a másik pedig a fáziskülönbséggel.

$$D_{\text{csonka}} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{n}{N} \cdot \frac{\lambda}{2}$$

A távmérés léptéke és a megméréendő távolság között az alábbi kapcsolatok állhatnak fenn:

- Ha a léptéket nagyobbra választjuk a megméréendő távolságnál, akkor az egész fázisciklusok száma (N) nulla lesz. Ekkor a távmérés nem lesz pontos, mert amikor meghatározzuk a fáziskülönbséget, és ebben bármilyen kis hibát vétünk, az nagy távolsághibát okoz, mert a lépték is nagy. Előnye, hogy a kapott távolság egyértelmű lesz.
- Ha a léptéket kisebbre választjuk a megméréendő távolságnál, a távmérés pontos lesz, de nem lesz egyértelmű, hiszen nem tudjuk, hogy a csonka fázisciklus mellett hány egész lépték volt (N ismeretlen).

Egyetlen léptékkel a távolságot vagy pontosan, vagy egyértelműen tudjuk meghatározni. A távmérésnél mindig többféle léptéket használnak. A legkisebb lépték a finom lépték, amitől a távmérés pontossága függ. A legnagyobb lépték a durva lépték, ami meghatározza, hogy mekkora távolságig lesz a távmérés egyértelmű. Amennyiben a durva lépték nagyobb, mint a távmérő hatótávolsága, akkor a távmérés mindig egyértelmű.

A durva lépték általában a távmérési eredmény kilométeres, száz- és tízméteres tagjának a meghatározásában vesz részt; a finom lépték pedig a tízméteres tagnál kisebb meghatározásában. Ha a mérési eredmény 1362,056 méter, akkor 1360 métert határozunk meg a durva léptékkel, és a 2,056 métert pedig a finom léptékkel.

A *változtatható mérőfrekvencia* elvén működő műszerekben a frekvencia változtatható a megméréendő távolság függvényében. Távméréskor először keresni kell egy olyan f_0 értéket, ahol a csonka fázisciklusok száma (maradék távolság) nulla. Ekkor meg kell mérni az f_0 frekvencia pontos értékét.

$$D = N \cdot \frac{\lambda_0}{2} = N \cdot \frac{v}{2f_0}$$

Ezután növeljük a frekvenciát a frekvenciasáv felső széléig. Eközben k -szor van olyan frekvencia, ahol a maradék távolság nullával egyenlő. Mérjük meg az f_{k+1} -edik frekvencia értékét! Ekkor

$$D = (N + k + 1) \cdot \frac{\lambda_{k+1}}{2} = (N + k + 1) \cdot \frac{v}{2f_{k+1}}$$

Az előbbi két képletből:

$$N \cdot \frac{v}{2f_0} = (N + k + 1) \cdot \frac{v}{2f_{k+1}}$$

$$N \cdot f_{k+1} = (N + k + 1) \cdot f_0$$

$$N = \frac{(k + 1) \cdot f_0}{f_{k+1} - f_0}$$

Az így kapott N értéket egész számra kerekítjük, és ekkor a D távolság értéke számítható.

Az állandó mérőfrekvencia elvén működő műszerek az elterjedtebbek. A változtatható mérőfrekvencia elvén működő műszerek pontosabbak, így térhódításuk a technika fejlődésével a jövőben várható.

5.3.2. A távmérési eredmény feldolgozása

A távolságként kijelzett eredmény még nem a ferde távolság számértéke, azt javítani kell az összeadó-állandó, a szorzóállandó és a meteorológiai javítás értékével. Az összeadó-állandó értéke akkor tér el zérustól, ha a távmérő elektromos zéruspontja és a visszaverő berendezés (prizma) optikai zéruspontja nincs a műszer és a prizma állótengelyén, azaz mérésakor nincs a mérendő pontok függőlegesében. Az összeadó-állandó gyári értékének változását úgy ellenőrizhetjük, ha egy adott távolságot először egészben mérünk meg (D), majd egy közbenső pontján felállva két részletben (D_1 , D_2) is megmérjük, ezekből a mérési eredményekből az összeadó-állandó számítható:

$$c = D - (D_1 + D_2)$$

Az összeadó-állandó értékét egy ismert távolság (D_e) megméréseével (D_m) is meg tudjuk határozni.

$$c = D_e - D_m$$

A szorzóállandó ideális értéke az egység. Ettől akkor tér el, ha a finom mérés frekvenciájának tényleges f_{van} értéke eltér a gyári f_{kell} értéktől. Az eltérés miatt a távmérő nem a távolságszámításhoz szükséges $(\lambda/2)_{kell}$ léptéket állítja elő.

A $\Delta f = f_{kell} - f_{van}$ frekvenciaeltérést szakmühelyben kell meghatározni és a műszert szükség esetén javítani. A távolság kiszámításakor a terjedési sebesség egy meghatározott értékét vesszük figyelembe. Ez az érték a levegő t_{kell} hőmérséklete és p_{kell} nyomása által meghatározott. Ha távméréskor a levegő hőmérséklete t_{van} , nyomása pedig p_{van} , az eltérésből a meteorológiai javítás szorzótényezőjét kell kiszámítani (t_{van} és p_{van} értéke folyamatosan változó érték) az alábbi képlettel:

$$m = 1 + (\Delta t - 0,4\Delta p) \cdot 10^{-6}$$

ahol $\Delta t = t_{kell} - t_{van}$
 $\Delta p = p_{kell} - p_{van}$

Az összeadó-állandó, a szorzóállandó és a meteorológiai javítás együttes figyelembevételével a távmérés D_{van} eredményéből a ferde távolság számítható:

$$D = c + k \cdot m \cdot D_{van}$$

ahol c – az összeadó-állandó
 k – a szorzóállandó
 m – a meteorológiai szorzótényező

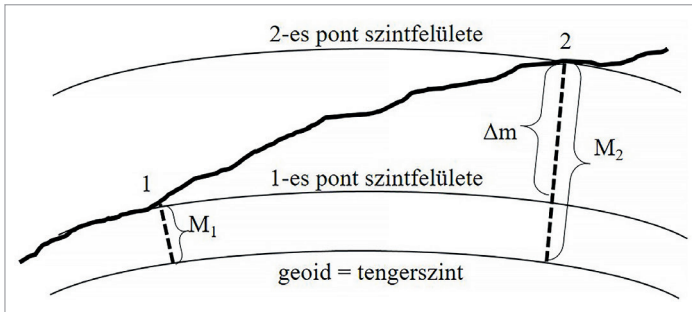
VÁKÁT OLDAL

6. Magasságmérés

6.1. Alapfogalmak

A földi pontok magasságát a geodéziában általában valamely középtengerszint magasságában kijelölt ponton átmenő szintfelülethez, a geoidhoz képest adjuk meg.

Ezt *abszolút magasságnak* vagy tengerszint feletti magasságnak nevezzük. Két pont magasságkülönbségén a pontok abszolút magasságának különbségét értjük, amit az egyik pont másikra vonatkozó *relatív magasságának* is nevezünk (6.1. ábra).



6.1. ábra: Abszolút és relatív magasság (a szerző szerkesztése)

Δm – relatív magasság (magasságkülönbség),
 M_1, M_2 – abszolút magasság (geoidhoz vagy tengerszinthez viszonyított magasság).

Valamely pontnak a geoidtól az illető ponton átmenő függővonalon mért távolsága az úgynevezett ortométeres magasság.

Mivel a szintfelületek az Egyenlítőtől a sarkok felé kismértékben összetartanak, az azonos ortométeres magasságban lévő pontok nincsenek ugyanazon a szintfelületen, hanem egy olyan felületen, amely párhuzamos a geoiddal. A szintfelületek nem párhuzamos voltának hatása azonban csak nagy távolságokon éri el, illetve haladja meg a szabatos magasságmérésekben egyáltalán elérhető megbízhatóságot.

Ezért a gyakorlati geodéziában egy viszonylag kis területen a szintfelületeket párhuzamosoknak, a függővonalakat pedig egyeneseknek tekintjük.

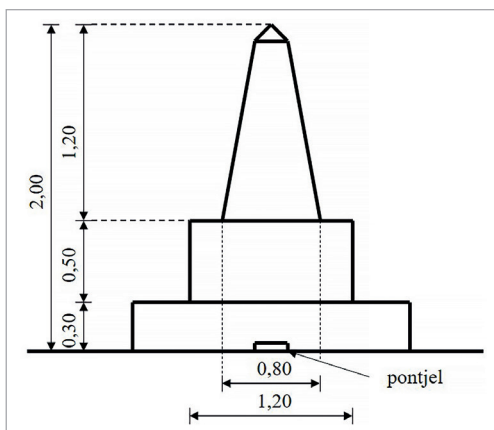
6.2. Magyarországi alapszintek

Mivel egységes középtengerszintről nem beszélhetünk, minden ország igyekezett a saját területéhez legközelebb eső tenger középszintjén átmenő szintfelületre vonatkoztatni a magassági méréseit.

Az Osztrák–Magyar Monarchia az Adriai-tenger középtengerszintjét tekintette magassági kiindulópontnak.

Az Osztrák–Magyar Monarchia első szintezési hálózatát a bécsi Katonai Földrajzi Intézet hozta létre 1873 és 1913 között. A Monarchia területén hét szintezési főalappontot létesítettek,

olyan geológiai képződményeken, amelyek helyzetüket nagy valószínűséggel csak igen kis mértékben változtatják. Ezen pontok közül a mai Magyarország területére csak egy alappont esik, a Velencei-hegység ösközetében lévő nadapi szintezési főalappont (6.2. ábra). A pontjel védelmét egy obeliszkyszerű építmény látja el, amelynek legfelső része leemelhető, és így a pontjelhez mérésekkel csatlakozni tudunk.



6.2 ábra: A nadapi szintezési főalappont jelvédő obeliszkje (a szerző szerkesztése)

A hálózat magassági alapszintjét a trieszti Molo Sartorio mareográfján (tengerszintmérő/regisztráló berendezés vagy thalattográf) jelölték ki 1875-ben. Kilenc hónapig tartó megfigyelésekből meghatározták a móló mellett elhelyezett tárcsa magasságát. Innen vezették le a hét főalappont magasságát. A nadapi alappont Adria feletti magasságát 173,8385 méterben határozták meg.

A Monarchia hálózatát súlyos hibák terhelték. Az I. világháború után Magyarországon (miután már az országnak nem volt kapcsolata az Adriai-tengerrel) középtengerszintnek azt a fiktív felületet fogadták el, amely a nadapi főalappont alatt 173,8385 méterre húzódik. Ez lett a nadapi magassági alapszint.

A második országos szintezést 1921 és 1939 között végezték, a II. világháborúban a pontok 60%-a elpusztult, ezért új hálózatot kellett tervezni.

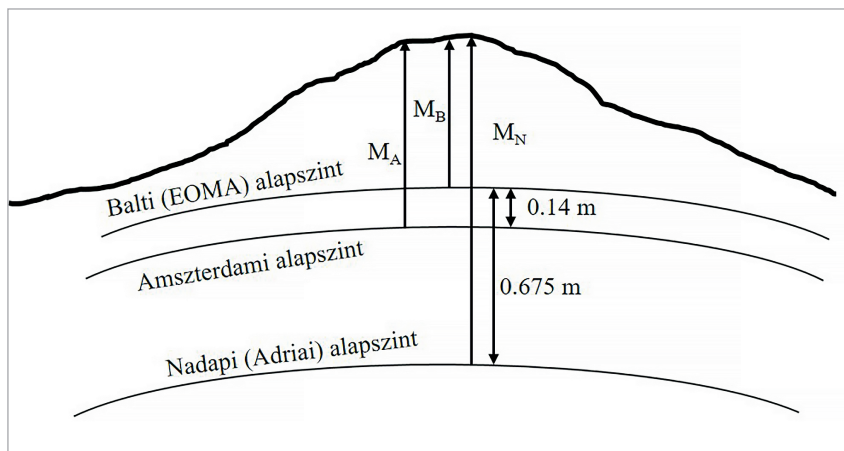
A harmadik országos szintezés 1948-tól 1964-ig tartott. Felhasználták a már meglévő alapon-tokat, és az ország területén nyolc főalappontot létesítettek. Olyan sűrűségű hálózat létrehozását tervezték, hogy minden településen legyen legalább egy alappont.

1952-től kezdődően a szocialista országok szintezési hálózatának összekapcsolása volt a cél, ezért 1960-ban utasítás jelent meg, amely a balti alapszint használatát írta elő. A Balti-tenger közepes tengerszintjének magasságát a Szentpétervár melletti Kronstadt város kikötőjében található mareográf regisztrálja. E szintfelület kiindulópontja a kronstadti híd lábában elhelyezett vízmérce 0 vonása.

Így megváltozott minden alappont magassága egy állandó értékkel. Ezt az állandót a nadapi főalappont esetében vezették le. A nadapi főalappont nadapi (adriai) magassága és balti magassága között a különbség 0,6747 méter. A balti alapszint magasabb, mint az adriai, azaz a pontok balti magassága mindig kisebb (6.3. ábra).

Az EUREF albizottság 1994-ben hozott határozata értelmében egységes magassági rendszert hoztak létre Európában. Az újonnan csatlakozott közép- és kelet-európai országok (Csehország,

Magyarország, Lengyelország, Szlovákia, Szlovénia, Horvátország és Bosznia-Hercegovina) szintezési hálózatának, az UELN-95-nek az egységes alapszintfelülete az amszterdami vízmagasságmérő nullpontja. Az amszterdami középtengerszint mintegy 14 cm-rel van mélyebben a balti középtengerszint magasságánál.



6.3. ábra: Alapszintek (a szerző szerkesztése)

Az 1970-es évek vége felé szükséges volt egy országos alapponthálózat – Egységes Országos Magassági Alapponthálózat (EOMA) – létrehozása. A hálózat elsőrendű pontjai az 1960-as években létesített kéregmozgás-vizsgálati pontok lettek. Az 1980-as években folytatták a hálózatépítést a másod- és harmadrendű pontok sűrítésével. 2005 után az I. rendű hálózat újramérése elkezdődött, és 2009-ben forráshiány miatt leállt. Közben néhány területen a III. rendű sűrítést tovább folytatták, ennek ellenére még mindig van olyan település, ahol nincs EOMA-pont, de számos településen létesültek III. rendű GNSS-meghatározású EOMA-pontok is. Az elpusztult pontok pótlása folyamatos.

Magyarországon már az 1700-as évektől végeztek magasságmeghatározást szintezéssel, elsősorban a folyószabályozásokhoz, illetve a helyi jellegű mérnöki munkákhoz.

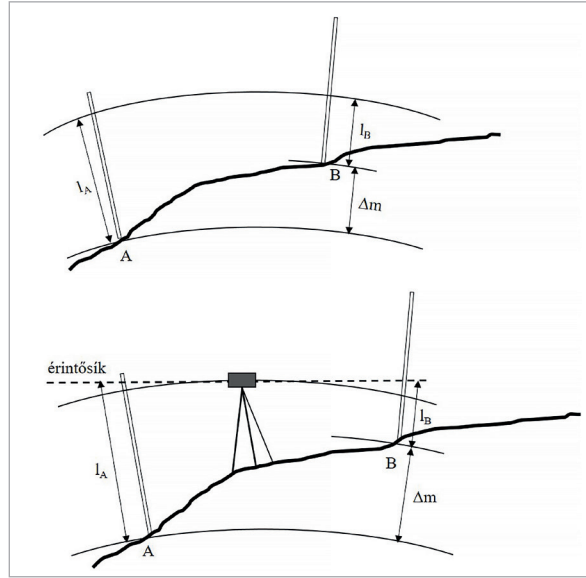
Vásárhelyi Pál nem csak a Tisza és az Al-Duna szabályozásában vett részt. Nevéhez fűződik a Duna felmérése és a magyarországi szintezések összekapcsolása az Adriai-tenger szintjével.

6.3. Magasságmérési módszerek

A magasságmérési eljárások során a pontok magasságkülönbségeit mérjük. Egy pont tengerszint feletti magasságát úgy állítjuk elő, hogy meghatározzuk a pont és egy ismert tengerszint feletti magasságú pont magasságkülönbségét.

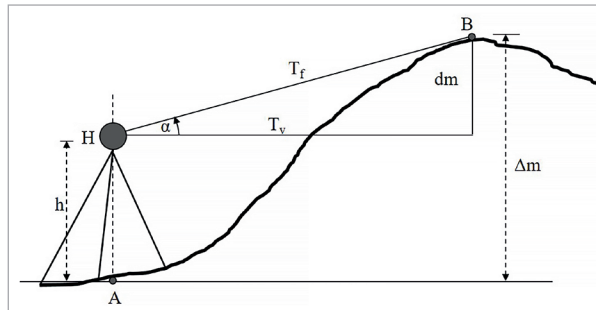
A földi pontok magasságkülönbségeinek meghatározására az alábbi módszerek használatosak:

a) Geometriai módszer (szintezés): lényege, hogy a két pont közelében előállítjuk egy szintfelület elemi darabkáját (hidrosztatikai szintezés) vagy a szintfelület egy érintősíkját (optikai szintezés), majd megmérjük a pontok függőleges távolságát a felületelemektől vagy az érintősíktól, amiből a pontok magasságkülönbsége számítható (6.4. ábra).



6.4. ábra: Szintezés (a szerző szerkesztése)

b) *Trigonometriai módszer (trigonometriai magasságmérés):* alapelve, hogy a magasságkülönbség nem más, mint függőleges távolság, ami egy derékszögű síkháromszögből kiszámítható, ha a háromszög egy oldala és rajta fekvő szöge ismert (6.5. ábra).



6.5. ábra: Trigonometriai magasságmérés (a szerző szerkesztése)

c) *Fizikai módszer (barométeres magasságmérés):* fizikai mennyiségeket mérünk, és a magasságkülönbséget fizikai összefüggések felhasználásával számítjuk ki. A barométeres magasságmérésnél a két pont magasságkülönbségét a két ponton mért légnyomáskülönbségből határozzuk meg, mivel a légnyomás a tengerszint feletti magasságtól (is) függ.

A különböző módszerek más és más megbízhatóságúak.

Szintezéssel pár milliméteres középhiba érhető el az egymástól 1 km távolságban levő pontok magasságkülönbségének a meghatározásában, és a középhiba a távolság négyzetgyökével arányosan nő:

$$\mu_t = \mu_0 \cdot \sqrt{t}$$

Trigonometriai magasságméréssel pár centiméteres középhiba érhető el 1 km-en, és a középhiba a távolsággal arányosan nő:

$$\mu_t = \mu_0 \cdot t$$

A barométeres magasságméréssel pár méteres megbízhatóság érhető el, a középhiba itt is nő a távolsággal, ám a növekedésének mértéke egyszerű összefüggéssel nem adható meg.

A fent említett módszerek közül a barométeres magasságmérés már elavult. Esetlegesen expedíciók alkalmával használják, ezért tárgyalásától eltekintünk.

A továbbiakban csak a szintezéssel és a trigonometriai magasságméréssel fogunk foglalkozni.

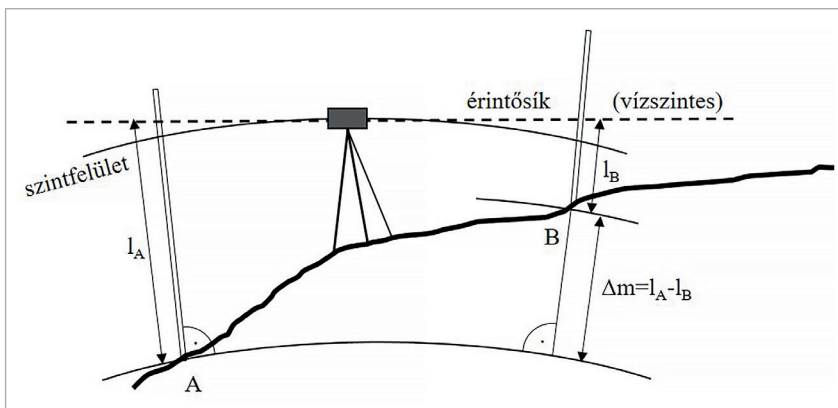
6.4. Szintezés

6.4.1. Optikai szintezés

A szintezés a magasságkülönbség meghatározásának egyik legrégebbi és egyben legelterjedtebb módszere. Az alapelve a kezdetek óta szinte semmit sem változott. A következőkben megismerjük az optikai szintezés eszközeit, módszereit és hibaforrásait, és a szintezés végrehajtásának gyakorlati szabályait.

A módszer lényege, hogy két pont (A és B) felezőjében létrehozuk (szintezőműszerrel) a szintfelület érintősíkját, és (szintezőléc segítségével) közvetlenül megmérjük a vízszintes sík és a pontok közötti merőleges távolságot (l_A , l_B), amelyek különbsége a keresett magasságkülönbség (6.6. ábra).

$$\Delta m = l_A - l_B$$



6.6. ábra: A geometriai szintezés elve (a szerző szerkesztése)

A gyakorlatban igen ritkán adódik olyan helyzet, hogy a megmérni kívánt két pont közvetlenül összelátható. Ha azok a pontok, amelyeknek a magasságkülönbségét meg akarjuk határozni,

egymástól messze vannak, vagy túl nagy a magasságkülönbségük, vagy a domborzati lefedettség miatt nem látszanak össze, illetve ha a pontossági követelmények megkívánják, akkor a két pont magasságkülönbségét több műszerállásban kell meghatározni. Ezért a két pont közé úgynevezett kötőpontokat (K) helyezünk el mintegy 80–200 méterenként, és ezek magasságkülönbségeinek megméréséből vezetjük le a két pont magasságkülönbségét. A kötőpontok magasságkülönbségének előjeles összegzésével kapjuk a két pont (A és B) magasságkülönbségét.

Minden kötőpontra kétszer olvasunk le, először a haladási iránnyal egyezően („előre”, l_e), másodsor a haladási iránnyal ellentétesen („hátra”, l_h). Az i -edik műszerállásban mért magasságkülönbség:

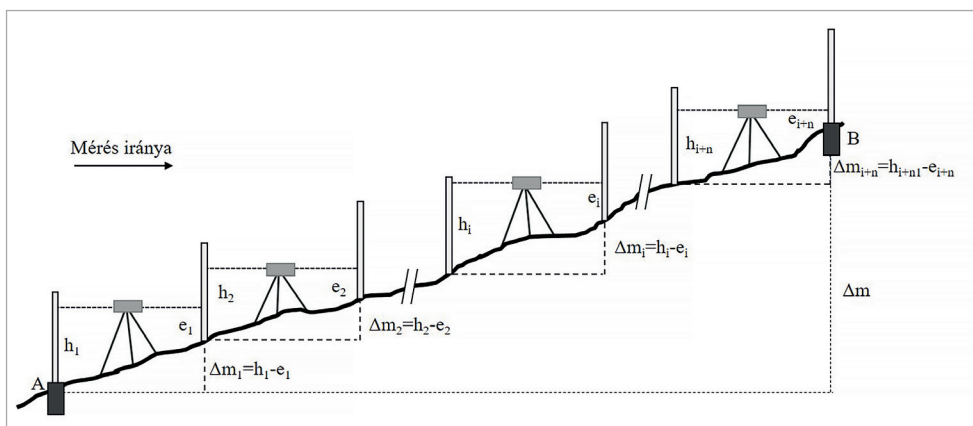
$$\Delta m_i = l_{i,h} - l_{i,e}$$

ahol $l_{i,h}$ – „hátra” leolvasás az $i-1$ -edik,

$l_{i,e}$ – „előre” leolvasás az i -edik kötőponton álló lécre vonatkozik.

A végpontok magasságkülönbsége pedig:

$$\Delta m_{A,B} = \sum m_i \text{ azaz } \Delta m_{A,B} = \sum l_{i,h} - \sum l_{i,e}$$



6.7. ábra: Szintezés több műszerállással (a szerző szerkesztése)

6.4.2. A szintezés eszközei

Az optikai szintezéshez használt műszerfelszerelés három különálló részből áll: ezek a műszerállvány, a szintezőműszer és a szintezőléc.

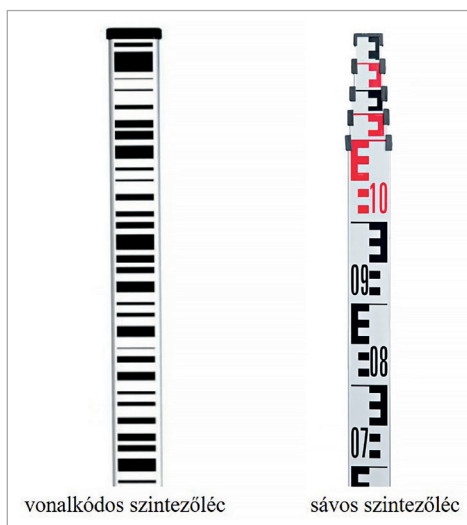
6.4.2.1. A műszerállvány

Ahhoz, hogy a mérést a szintezőműszerrel kényelmes szem- és testhelyzetben lehessen végrehajtani, és hogy mérés közben a műszer mozdulatlan maradjon, különböző műszerállványokat szerkesztettek. Sok esetben a teodolitok műszerállványa alkalmas szintezőműszerhez is.

6.4.2.2. A szintezőléc

A szintezés eszközei közé tartozik a szintezőléc. A mérnöki szintezésekhez egyszerű sávos beosztású szintezőléceket használnak (6.8. ábra).

Régebben csomómentes fenyőfából készült, 3-4 m hosszú (a 4 m-es lécek összecusukhatók), alul fémlemezben végződő, egyszerű sávos beosztású léceket használtak. Ma már elterjedtebbek az alumínium vagy üvegszálas lécek, műanyag véggel a talpukon, szintén sávos beosztásúak. A digitális szintezőműszerekhez tartozó lécek vonalkódosak. A szintezőlécek lehetnek egy tagból állók, félbehajthatók vagy teleszkóposak, 2-5 m hosszúak.



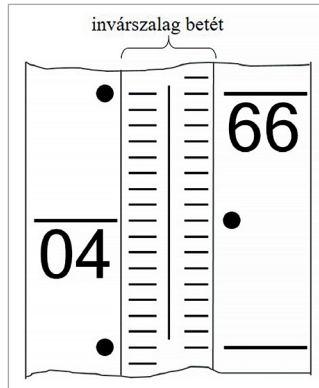
6.8. ábra: Szintezőléc (a szerző szerkesztése)

A lécbelosztás kezdőpontjának a saru alsó síkjától való eltérését talpponthibának vagy a lécnulpponthibájának nevezzük.

A sávos beosztás centiméterosztásai felváltva fekete és fehér, kb. 20 mm hosszú sávok. A beosztást deciméterenként számozzák, és a számjegyek abban a deciméterben vannak, amelyekre vonatkoznak.

A szintezőlécek fontos tartozéka a libella. Korszerű lécekhez felpattintható libellát adnak. A régebbi szintezőléceket, amelyekben nincs beépítve libella, úgynevezett léccállító libellával hozzák függőleges helyzetbe.

A szabatos szintezéshez általában invárszalag-betétes szintezőléceket használnak (6.9. ábra). A lécnemű, általában 3 m hosszú, fából készül, és szekrény kiképzésű, amelyben a kb. 25 mm széles, a hőmérséklet-változás hatására lényegében nem változó, úgynevezett invárszalagot kifestítve helyezik el. A beosztást a szalagra viszik rá, két, egymással szemben eltolva vonásos osztást alkalmaznak. A vonások távolsága általában 5 mm. A két beosztás, valamint a két egymástól eltérő számozás lehetővé teszi, hogy mindkét beosztáson leolvassuk a durva leolvasási hibákat, és csökkentsük a véletlen és szabályos hibákat.



6.9. ábra: Invárbetétes szintezőléc (a szerző szerkesztése)

A kötőpontokon a szintezőléceket gömbölyű fejű szeggel ellátott facövekre vagy úgynevezett szintezősarura helyezik el.

A szintezősaruk fémöntvényből készülnek, az aljukon lévő három tűske biztosítja azt, hogy mérés közben a kötőpont a mérés ideje alatt mozdulatlan maradjon. A fejezetük félgömb alakú, ami a lécc egyértelmű fekvését biztosítja (6.10. ábra).



6.10. ábra: Szintezősarú (a szerző szerkesztése)

6.4.2.3. A szintezőműszer

A szintezőműszerek különböző szempontok szerint csoportosíthatók.

Az irányvonalat vízszintessé tevő műszerelemek szerint megkülönböztetünk:

- libellás szintezőműszereket, amelyek távcsövének irányvonalát a távcsőre szerelt szintezőlibellával tesszük vízszintessé;
- kompenzátoros szintezőműszereket, amelyek távcsövének irányvonalát általában a távcsőbe épített úgynevezett kompenzátor teszi automatikusan vízszintessé;
- digitális szintezőműszereket, amelyek optikai-mechanikai felépítése hasonló a kompenzátoros műszerekéhez, de a mérés digitális képek alapján automatizáltan történik.

A három talpcsavaros műszertalponhoz (álló rész) rögzítik az alhidádét (mozgó rész). Az alhidádé az állótengely körül forgatható. Az alhidádé rögzítésére és a finom irányzásra a régebbi műszereken a kötő- és parányicsavar szolgál. Ma már a kötőcsavar nélküli, úgynevezett súrlódásos tengelykötést alkalmazzák, és végtelenített parányicsavarral az alhidádé tetszés szerinti mértékben elforgatható. Az állótengelyt az alhidádéra épített szelencés libellával tesszük függőlegessé.

6.4.3.1. Libellás szintezőműszerek

A szintezőműszer távcsöve belső képállítást, az alhidádéhoz kötött geodéziai távcső, amely az állótengelyre merőleges fekvőtengely körül a szintezőcsavarral kismértékben forgatható.

A távcső nagyítása 15-25-szörös, a szintezőlibella állandója 30-60”.

A távcső szállemezén egyszerű szálkereszt van, egy álló és egy fekvő irányszállal. Az álló és fekvő szálon kívül a szállemezt távmérőszálakkal is ellátják.



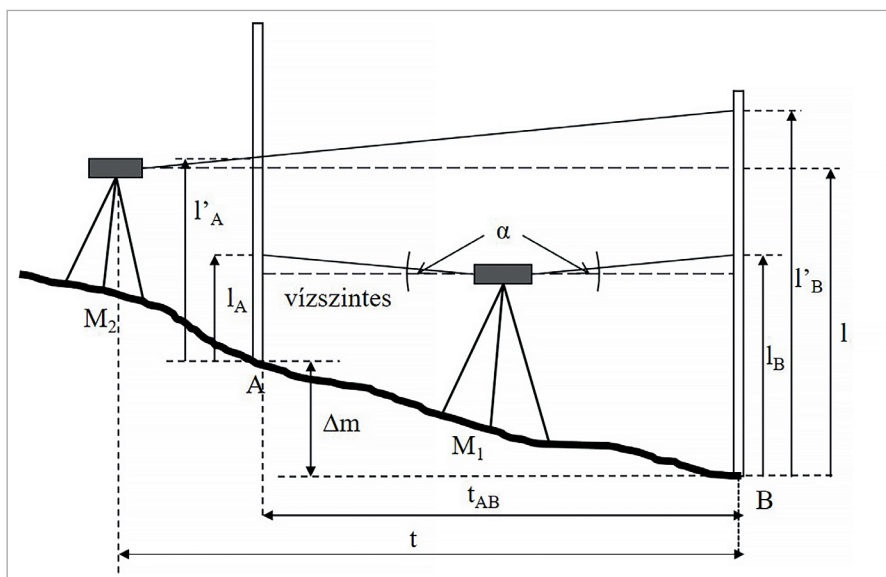
A szintezőlibellát a távcsövön hosszirányban szilárdan összekötve helyezték el. A szintezőlibellát csak az egyszerűbb felépítésű műszereken lehetett közvetlenül szemlélni. A korszerűbb műszereken egy prizmás vetítőberendezéssel a két buborékfelet bevetítették a távcsőokulárba. Ezzel a mérési idő javítható, ami kihat a magasságmérés pontosságára is. A szintezőcsavar forgatásával, a libella középre állításával a libellatengely a távcső irányvonalával párhuzamossá tehető (kiigazítható). Az úgynevezett koincidenciás prizmás megfigyelőberendezéseknél a két buborékfelet úgy vetítik a távcső látómezejébe, hogy azok egymás mellett látszódnak. Ha a libella buborékja nem áll középen, a két fél rész egymáshoz képest eltolódva látszik. A szintezőcsavar forgatásával a két buborékfél ellentétes irányba elmozdul. A távcső akkor lesz vízszintes, ha a két buborékfél koincidenciában látható.

A szintezőlibella állandója a műszer teljesítőképességétől függően mintegy $10'' - 60''/2 \text{ mm}$ közötti érték.

A libellás szintezőműszereket szintezőcsavarral szerelik föl. Ennek segítségével mozgatható a távcső a szintezőlibellával együtt a fekvőtengely körül. Így az irányvonalat vízszintessé tehetjük, ha a szintezőlibella buborékját a szintezőcsavarral minden lécleolvasás előtt középre állítjuk, illetve koincidenciába hozzuk.

A szintezőcsavarnak azt a helyzetét, amikor a szintezőlibella tengelye merőleges az állótengelyre, a szintezőcsavar normális állásának nevezzük, aminek a szintezőműszer vizsgálatánál és igazításánál van jelentősége.

A libellás szintezőműszer vizsgálata és igazítása



6.12. ábra: Szintezőműszer vizsgálata (a szerző szerkesztése)

A szintezőműszereknél a szintezési technológiák igénylik a vizsgált és igazított szintezőműszer használatát, mivel a szabályos hibák kiküszöbölésére nincs technológiai megoldás. Egy kiigazított szintezőműszernek három feltételt kell kielégítenie:

1. *Az alhidádél libella tengelye legyen merőleges az állótengelyre* (szelencés libella vizsgálata). Ha a szelencés libella igazított az állótengelyhez, akkor az alhidádé tetszőleges helyzetében a szelencés libella buborékját középre állítjuk, majd a műszert körbeforgatva a szelencés libella buborékja középen marad. Amennyiben a szelencés libella nem igazított az állótengelyhez, előfordulhat, hogy a műszert körbeforgatva a szintezőcsavar használatával a szintezőlibella buborékja nem hozható középre. Ebben az esetben a szelencés libellát célszerű kiigazítani.
2. *A szintezőlibella tengelye legyen párhuzamos a távcső irányvonalával*. Ha ez nem teljesül, akkor irányvonal-ferdeségről beszélünk. A vizsgálata a következőképpen történik:
 - A szintezőkészlettel közel vízszintes terepen a két egymástól mintegy 50 m távolságra lévő A és B ponttól egyenlő távolságra felállunk, és meghatározzuk a két pont $\Delta m = l_A - l_B$ valódi magasságkülönbségét. (A műszer-léc távolságok egyenlősége miatt az irányvonal ferdesége kiesik.)
 - A szintezőkészletet áthelyezzük az A ponttól az AB egyenesében minimum 2-5 m távolságra, és ismét megmérjük a két pont $\Delta m' = l_A - l_B$ hibás magasságkülönbségét.
 - Számítjuk az irányvonal ferdeségét a két magasságkülönbségből és a két pont távolságából: $\alpha = \frac{\Delta m - \Delta m'}{t_{AB}} \cdot \zeta''$
 - Ha az előjele pozitív, akkor az irányvonal a vízszintestől felfelé hajlik, ha negatív, akkor lefelé. Az igazításhoz számítjuk a távolabbi t távolságra lévő B pontra vonatkozó hibátlan leolvasást: $l = l'_B - \frac{\alpha''}{\zeta''} \cdot t$, vagy közvetlenül α helyettesítéssel: $l = l'_B - \frac{(\Delta m - \Delta m') \cdot t}{t_{AB}}$
 - A műszer irányvonalát a szintezőcsavarral az l lécleolvasási értékre állítjuk, majd a szintezőlibella magassági igazítócsavarjával a buborékot középre állítjuk.

A gyakorlatban ezt a vizsgálatot úgy is elvégezhetjük, hogy a második (M_2) műszerállást A pontnál úgy választjuk meg, hogy a műszer távcsőve érintse az A ponton álló szintezőléce. Ekkor a B ponttól t_{AB} távolságra lesz (6.12. ábra). Így távolságmérés nélkül számítani tudjuk a B pontra vonatkozó hibátlan $l = l'_B - (\Delta m - \Delta m')$ leolvasást.

Amennyiben nincs lehetőség a szintezőlibella kiigazítására, akkor az irányvonal-ferdeség hatásával a leolvasásokat megjavítjuk.

3. *A távcső fekvő irányszála legyen merőleges az állótengelyre*, azaz ne legyen szálferdeség. Ha a fekvőszál bal oldalával megirányzunk egy pontot, majd a parányicsavar forgatásával a pont képét végig tudjuk úgy vinni a fekvőszálon, hogy az nem mozdul el róla, akkor a fekvőszál merőleges az állótengelyre. Ha ez nem teljesül, akkor a szintezőkészletet igazítani kell. A diafragma gyűrű segítségével vízszintes helyzetbe kell hozni a fekvőszálat.

6.4.3.2. Kompenzátoros szintezőkészletek

A kompenzátoros szintezőkészleteknél elég az állótengelyt közelítőleg függőlegessé tenni, utána a nehézségi erő hatására elmozduló műszerelem, az úgynevezett kompenzátor az irányvonalat automatikusan vízszintessé teszi.

A kompenzátoros szintezőkészletek előnye, hogy használatuk gyors, hőmérséklet hatására kevésbé érzékenyek, mint a libellás szintezőkészletek. Hátrányuk a libellás szintezőkészletekkel szemben, hogy érzékenyebbek a rezgésekre. Járműforgalom vagy erős szél hatására

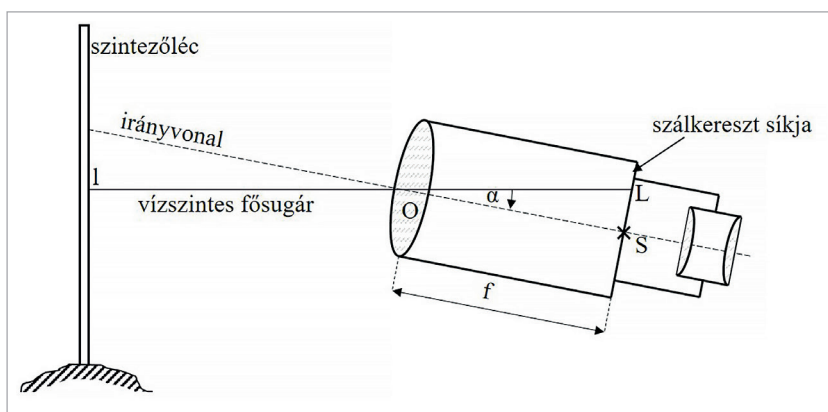
a kompenzátorok hamar rezgésbe jönnek, ami megnehezíti, vagy erős rezgések esetén akár lehetetlenné teszi a lécleolvasást.

A kompenzátoros szintezőműszerek működési elve

A kompenzátoros szintezőműszerek távcsöve az alhidádéval összekötött, azaz a műszernek nincs fekvőtengelye.

A geodéziai távcső objektívjának optikai középpontját O -val jelöljük, a szálkeresztet metszéspontját S -sel. Az OS pontokat összekötő egyenest irányvonalnak nevezzük.

Feltételezzük, hogy a távcső irányvonala nem vízszintes, hanem valamilyen α szöget zár be az objektív optikai központján (O) átmenő vízszintes egyenessel. Ezt az egyenest nevezzük főszárnak, az α szöget pedig távcsőhajlásnak (6.13. ábra).



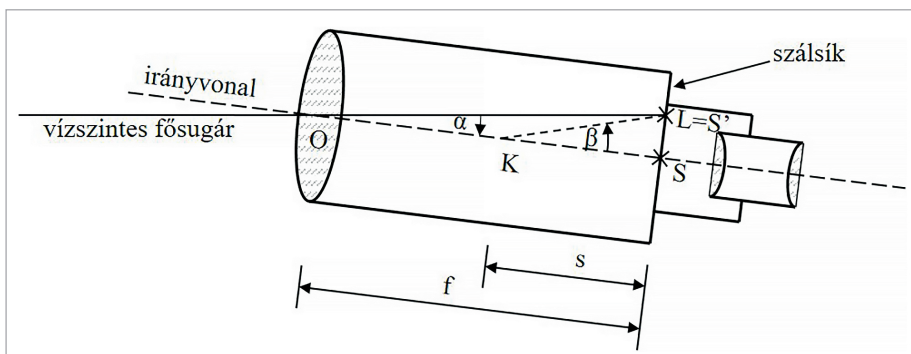
6.13. ábra: Kompenzátoros szintezőműszer (a szerző szerkesztése)

A szintezőlé l pontján átmenő fősugár a szálkereszt síkjában L lécpontban képződik le. Ha a távcső vízszintes lenne, az L lécpontnak az S szálkereszt középpontba kellene esnie. Ferde irányvonal mellett L és S pontok nem esnek egybe.

Tételezzük fel azt, hogy a szintezőlé a végtelenben van, ekkor az L pont az objektív fókusz-síkjában keletkezik, tehát $OS = f$.

A kompenzátor feladata, hogy a biztosítsa az L lécpont képének és az S szálkeresztközéppontnak az egybeesését. Ezt kétféleképpen lehet elérni:

a) *Irányvonal-vezérlés:* vagy a szállemez mozdul el az objektívhez képest, vagy az objektív a szálkereszthez képest, azaz a K pontbeli kompenzátor az S pontot eltolja az L pontba. Ilyenkor az irányvonal mozdul el. A leggyakoribb megoldása a szálkereszt ingaszerű felfüggesztése.



6.14. ábra: Irányvonal-vezérlésű kompenzátor (a szerző szerkesztése)

Ezek a kompenzátorok az S pontnak az O ponthoz viszonyított vagy az O pontnak az S ponthoz viszonyított elmozdulását az irányvonal egy K pont körüli forgatásaként állítják elő (6.14. ábra), α távcsőhajlás esetén a szálsíkot S pontja L pontba kerül. A kompenzálás bekövetkezése esetén az SL távolság az OSL derékszögű háromszögből:

$$t_{SL} = f \cdot \tan \alpha$$

a KSL derékszögű háromszögből:

$$t_{SL} = s \cdot \tan \beta$$

A kompenzátorok nem tudják bármilyen nagyságú távcsőhajlás hatását megszüntetni, csak egy bizonyos tartományon belül. A távcsőhajlás maximális értékét, ahol a kompenzátor működik, kompenzációs tartománynak nevezzük. A kompenzációs tartomány értéke 8° - 10° körül van. Ilyen nagyságrendű szögeknél $\tan \alpha \approx \alpha$, illetve $\tan \beta \approx \beta$ helyettesítés megengedhető.

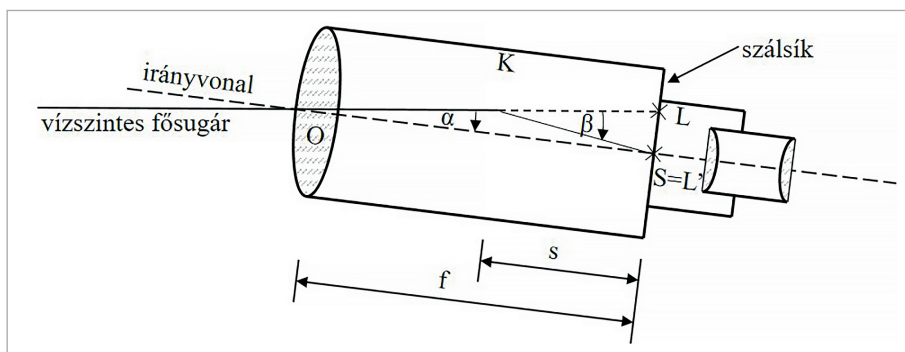
Az irányvonal-vezérlésű kompenzátorok alapegyenlete:

$$f \cdot \alpha = -s \cdot \beta$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy az elfordulási szög forgási értelmének α -hoz viszonyítva ellentétes értelműnek kell lennie. Az elmozdulás mértéke nagyon kicsi, például

$$f = 30 \text{ cm}; \alpha = \pm 10' \quad \text{esetén} \quad f \cdot \alpha \approx \pm 1 \text{ mm}$$

b) *Fősugárvezérlés:* A kompenzátor az L pontot tolja el az S pontba, azaz megtöri a vízszintes fősugarat. A K pontban elhelyezett kompenzátor a vízszintes fősugarat úgy téríti el, hogy az L lécpont az S szálsírközéppontba essék (6.15. ábra). Ezeknél a kompenzátoroknál a fősugár irányát optikai rendszer segítségével törik meg.



6.15. ábra: Főszugár-vezérlésű kompenzátor (a szerző szerkesztése)

A kompenzáció bekövetkezése esetén teljesülnie kell a $f \cdot \alpha = s \cdot \beta$ feltételnek. Az ábrából látható, hogy ebben az esetben α és β forgásértelmének meg kell egyeznie.

Kompenzátoros szintezőműszerek vizsgálata és igazítása

A kompenzátoros szintezőműszerekkel szemben támasztott követelményeket ismertetjük a következőkben, illetve a gyakorlati munkához szükséges műszerelemek vizsgálatával és igazításával foglalkozunk.

a) Az állótengely-libella vizsgálata és igazítása

Az alhidádélibella (szelencés) tengelye legyen merőleges az állótengelyre.

Ezt az igazítást gondosan kell elvégezni, mert a kompenzátorok csak egy adott kompenzációs tartományon belül működnek. Ezenkívül a szintezőműszer szabályos hibái egyenesen arányosak az állótengely ferdeségi szögével.

A vizsgálatot és igazítást ugyanolyan módon hajtjuk végre, mint a libellás szintezőműszereknél.

Ha az alhidádét körbeforgatva azt tapasztaljuk, hogy a szelencés libella buborékja elmozdul, akkor igazítatlan a szelencés libella. Ennek kiigazítását úgy hajtjuk végre, hogy az alhidádét körbeforgatva megkeressük a libella normálpontját, arra állítjuk a libella buborékját. Ekkor az állótengely függőleges. Az igazító csavarok segítségével a buborékot középre hozzuk.

Ha a kiigazítást nem tudjuk végrehajtani, a műszert szervizeltetni kell. Javasolt a műszerek szakszervizben való rendszeres karbantartása.

b) Az alapírányvonal legyen merőleges az állótengelyre

A kompenzátoros szintezőműszerek alapírányvonalának az irányvonalnak a pontosan függőleges állótengely mellett felvett helyzetét nevezzük. Az alapírányvonalnak a vízszintessel bezárt szögét az alapírányvonal ferdeségi szögének nevezzük. (Libellás szintezőműszereknél irányvonal-ferdeség.)

Az alapírányvonal-ferdeség meghatározása ugyanúgy történik, mint a libellás szintezőműszereknél azzal a különbséggel, hogy itt a kompenzátoros szintezőműszer állótengelyét kell gondosan függőlegessé tenni (a szintezőlibella buborékjának középre hozása helyett). Mindkét műszerállásban egy külön felszerelt csöves libellával. Ha erre nincs lehetőség, akkor mindkét

műszerállásban kétszer kell a magasságkülönbséget meghatározni. Az első mérésnél az állótengelyt az objektív *A* pont felé (hátra leolvasás) helyzetben, a második mérésnél az objektív *B* pont felé (előre leolvasás) helyzetben tesszük függőlegessé. A valódi és hibás magasságkülönbséget a két-két érték számtani átlagaként kapjuk. Az igazítást a kompenzátor megfelelő igazítócsavarjával végezzük el. Az igazítást általában laboratóriumban végezzük.

c) A fekvő irányszál legyen merőleges az állótengelyre. Vizsgálatát és igazítását lásd a libellás szintezőműszereknél.

Ha az állótengely dőlése nagyobb a kompenzációs tartománynál, vagy a kompenzátor nem működik megfelelően, a műszer nem képes előállítani a vízszintes síkot. Ezt a jelenséget *horizontferdeségnek* nevezzük.

A távcsőhajlást a ferde állótengely okozza. Ha az állótengely ferdesége a kompenzátor kompenzációs tartományán belül van, és a kompenzátor hibátlanul működik, akkor a műszer tudja kezelni a távcsőhajlást értékét, és előállítja a vízszintes síkot. A horizontferdeséget úgy tudjuk kiküszöbölni, hogy a műszer állótengelyét gondosan függőlegessé tesszük (és a szelencés libellát igazítjuk az állótengelyhez), illetve a kompenzátorhiba esetén a műszert laboratóriumban javítják.

6.4.3.3. Digitális szintezőműszerek

A mai mérnöki gyakorlatban előtérbe kerültek a digitális szintezőműszerek. Az automatikus leolvasás, az egyszerű és gyors kezelés, beépített programok (például kiegyenlítés) nagy előnyt jelentenek a hagyományos libellás és kompenzátoros szintezőműszerekkel szemben, lehetővé téve a pontos magasságmeghatározást a mérnöki gyakorlatban.

A mai digitális szintezőműszerek elődjét 1966-ban Bonnban fejlesztették ki, majd a drezdai műszaki egyetemen ötéves kutatómunka után 1987-ben elkészült a mai értelemben vett digitális szintezőműszer prototípusa. Az első sorozatgyártású digitális szintezőműszereket a Leica cég mutatta be 1990-ben (NA2000).

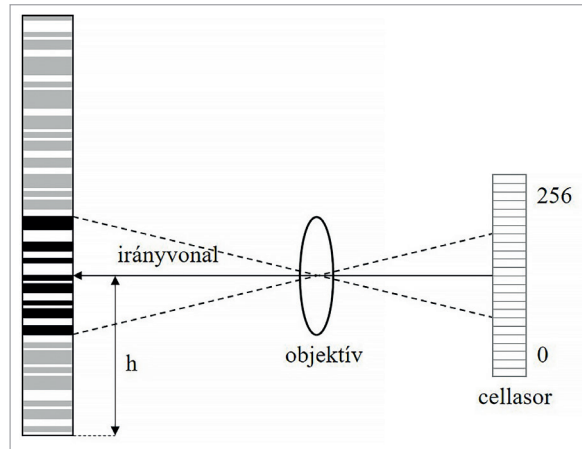
Ezek a műszerek már egy bárkódos lécről tudtak automatikus leolvasást végezni (6.16. ábra).



6.16. ábra: A Leica NA 2000 digitális szintezőműszer és a hozzá tartozó bárkódos lécek egy szakasza [9]

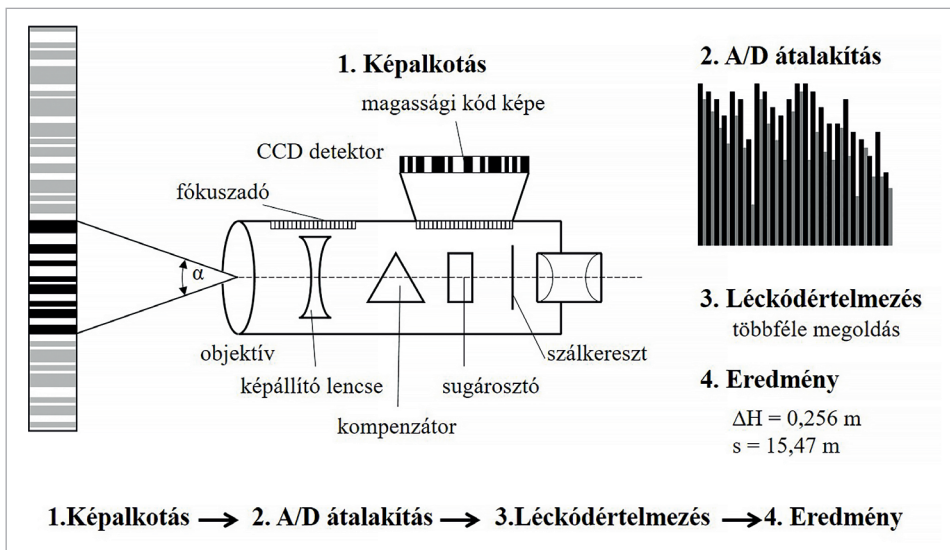
A digitális szintezőműszerek kialakításánál a legnehezebben megoldható feladat az volt, hogyan lehet a bárkódos lécek osztásvonásainak leolvasását és az így kapott digitális adatok számértékké való átalakítását megvalósítani. A digitális szintezőműszerek irányzásakor a látómezőben

megjelenő léckivágatot az optika leképezi egy CCD (*charge coupled device*) cellasorra. A léckivágat a szintezőlécnek az a szakasza, ahol az irányvonal metszi a szintezőlécet. A vízszintes irányvonalhoz tartozik egy olyan leolvasás, amelyet a száskereszt helyett egy kalibrálási eljárással meghatározott cellához rendelnek (6.17. ábra).



6.17. ábra: A digitális szintezőműszer geometriai működésének elve (a szerző szerkesztése)

A bárkódos szintezőlécnek fekete és fehér osztásúak. A léckivágat leképződésekor a CCD-érzékelőkön a beérkezett fényintenzitások képződnek le. Ezeket egy analóg-digitál átalakító bináris (0 és 1 számjegyek) számokká alakítja át (6.18. ábra). A feldolgozóegységben a bináris számjegyekből álló kódsorozatot összehasonlítják egy előre eltárolt referencia-jelsorozattal, ezáltal értelmezni lehet a léckivágat képét, és meghatározható a vízszintes irányvonalhoz tartozó léckleolvasás. A műszer a léckleolvasást és általában a ferde távolságot kiírja a kijelzőre.



6.18. ábra: A digitális szintezőműszer mérési folyamata (a szerző szerkesztése)

A mérés folyamata a digitális szintezőműszerek esetén négy részre osztható:

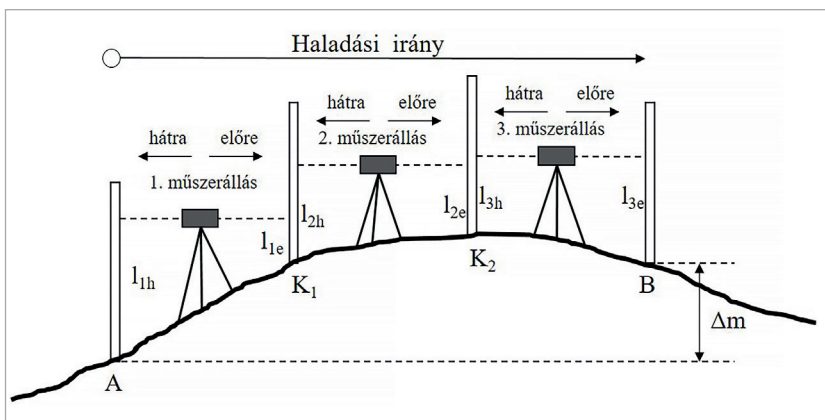
1. A léckivágat képének rögzítése a CCD-soron.
2. A léckivágat képének analóg-digitál átalakítása.
3. A digitális kép kiértékelése.
4. Eredmény kijelzése (magasságkülönbség, vízszintes távolság).

A digitális műszerek optikai-mechanikai felépítése hasonló a kompenzátoros szintezőműszerekéhez azzal a különbséggel, hogy ezeknél a műszereknél a képrögzítés, képfeldolgozás és képkiértékelés megfelelő elemei be vannak építve.

Annak ellenére, hogy 1990-ben az első – szakmai nyilvánosság előtt bemutatott – digitális szintezőműszerről a fejlesztők azt ígérték, hogy szabályos hibáktól mentes méréseket lehet majd vele végezni, ez nem valósult meg. A kompenzátoros szintezőműszereknél fellépő hibák ezeknél a műszereknél is megtalálhatóak.

6.4.4. A szintezés végrehajtása

A vonalszintezés gyakorlati végrehajtása a következőképpen történik:



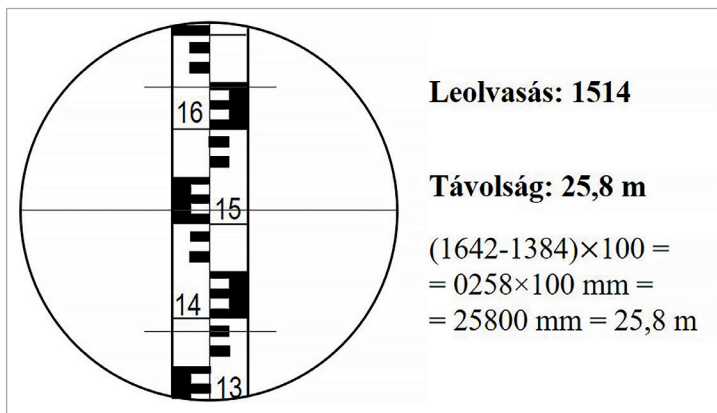
6.19. ábra: Szintezés több műszerállással (a szerző szerkesztése)

Az egyik léce felállítjuk a vonal kezdőpontján (A pont), erre a lécre végezzük az első hátra leolvasást. A másik léces elindul ettől a ponttól, és szalaggal (vagy ritkábban lépéssel) kiméri a léce-műszer távolságot. A műszeres feláll a szintezőműszerrel a kijelölt helyen. Az előre léces kimérve az előbbi léce-műszer távolságot, a szintezősarut leteszi a földre, jól letapossa, és a középe helyezi a szintezőléce (K_1 pont). Az észlelő a műszerláb betaposása után az állótengelyt közelítőleg függőlegessé teszi a szelencés libellával. Megirányozza a hátra léce középvonalát, majd megszünteti a parallaxist, és elvégzi a pontos irányzást. Az álló irányszáznak és a léce tengelyének fedésbe kell kerülnie. A szintezőműszerek szátkeresztjét úgy alakították ki, hogy azon három fekvő szál van. A középső jelöli ki a vízszintes síkot, alatta és felette egyenlő távolságra két rövidebb szál helyezkedik el, ezek az úgynevezett távmérőszálak. A műszeres elvégzi a leolvasást mindhárom szálon négy számjegyre. Az első kettőt a lécen megírt számok alapján, a harmadikat az osztások megszámlálásával, a negyediket, azaz a milliméter értéket pedig becsléssel.

Az előre lécen ugyanezt a műveletsort kell elvégezni. Ekkor már nem lép fel parallaxis, mivel azonos a műszer-léc távolság. A jegyzőkönyvvezető felírja a jegyzőkönyvbe a három szálon tett leolvasásokat mind a hátra, mind az előre léc esetében. A távmérőszálakon tett leolvasások számtani középértékét összeveti a középső szálon tett leolvasással. A kettő közötti különbség 2 mm-nél több nem lehet. A magasságkülönbséget a középső szálon tett leolvasások különbségeként képezi. Ezt minden műszerállásban még a műszer és a léc felemelése előtt ellenőrizni kell, ezzel biztosítva azt, hogy a leolvasásnál nem követünk el durva hibát.

Amennyiben minden rendben van, akkor lehet továbbmenni a következő álláspontra. A volt előre léces nem mozdul, csak átfordítja a szintezőlécet a másik irányba. A műszeres továbbviszi a műszert, és most a volt hátsó léces méri ki a műszer-léc távolságot előre irányban. A műszer-léc távolságok egyenlőségét úgy tudjuk biztosítani, ha mindig az előre léces méri ki azt. A további műszerállásponatokon az előbbieken leírtakat kell ismételni (6.19. ábra).

Itt jegyezzük meg, hogy a távmérőszálakon tett leolvasások különbségéből a műszer-léc távolság értéke néhány dm pontossággal számítható, amit ellenőrzésül is fel lehet használni (6.20. ábra).



6.20. ábra: Lécleolvasás és távolságmérés (a szerző szerkesztése)

6.4.5. A szintezés hibaforrásai és kiküszöbölési módjai

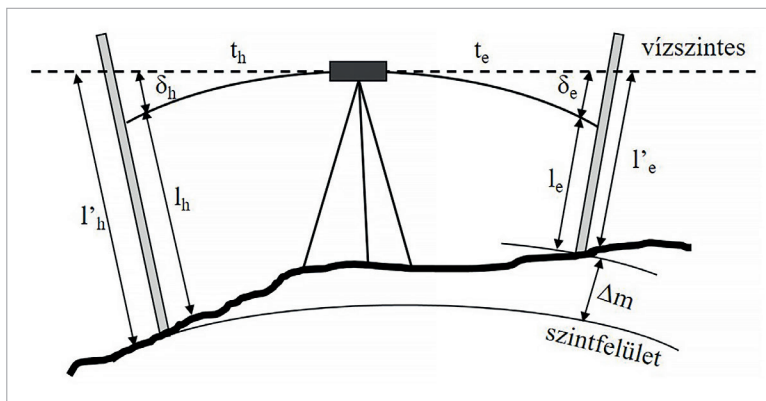
Az előzőekben megismertük az optikai szintezés alapelvét és eszközeit. A következőekben tárgyaljuk, hogy a szintezés gyakorlati végrehajtása során milyen hibaforrásokkal kell számolnunk, ezek milyen hatással vannak a szintezés eredményére, milyen módon tudjuk kiküszöbölni, illetve minimálisra csökkenteni őket.

6.4.5.1. A szintfelület görbültségének hatása

Két pont magasságkülönbségének meghatározásához nekünk a pontok szintfelülettől mért l'_h és l'_e távolságára lenne szükségünk, viszont az optikai szintezésnél az érintő síktól mért l_h és l_e távolságot határozzuk meg (6.21. ábra).

6.4.5.2. A talajközeli refrakció hatása

Amikor a szintezőműszerrel mérni akarunk, a távcső irányvonalát vízszintessé tesszük. A műszerrel két pont közé felállva a távcsövet egy t_h és t_e távolságban lévő függőlegesen felállított szintezőlécre irányítjuk. A távcsőbe nézve, a levegőben mindig bekövetkező fénytörés (refrakció) miatt a lécen l'_h és l'_e lécleolvasások helyett l_h és l_e leolvasásokat látjuk (6.22. ábra).



6.22. ábra: A refrakció hatása (a szerző szerkesztése)

Az ábráról leolvasható, hogy

$$l'_h = l_h + \delta_h \text{ és } l'_e = l_e + \delta_e,$$

ahol δ_h és δ_e a refrakció hatása a lécleolvasásra.

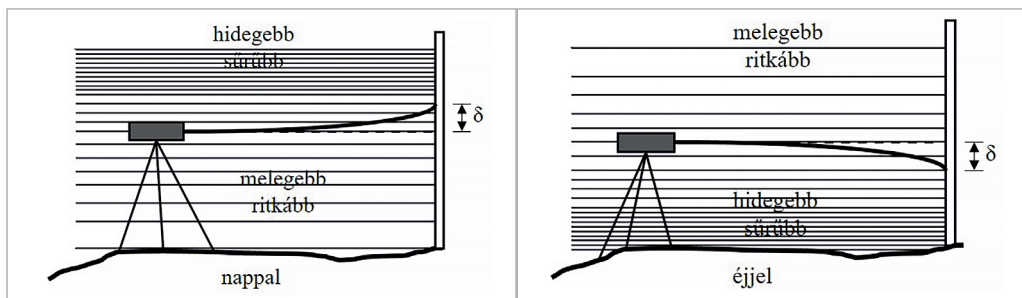
A talajközeli refrakció a szintezésben véletlen és szabályos jellegű hibát okoz. A refrakció véletlen jellegű hibáját a légrezgés és a léglengés jelensége okozza. Erről a jelenségről már a 4.2.4.3. pontban szoltunk.

Erős légrezgés és léglengés időszakaiban nem szabad szintezést végezni.

A 6.22. ábrán jelölt δ_h és δ_e a refrakcióhatás szabályos jellegű hibája. Az irány sugar különböző sűrűségű légrétegeken halad át, és az optika törvénye szerint megtörik. A levegő optikai sűrűsége pontról pontra változik, így a törésmutató folyamatos változásának megfelelően az irányvonal görbe alakú lesz (refrakciógörbe). A levegő törésmutatóját döntő mértékben a levegő hőmérséklete határozza meg.

Nappal a talaj erős felmelegedése következtében a melegebb légrétegek helyezkednek el alul, a talajtól távolodva a hőmérséklet fokozatosan csökken. Ilyenkor a refrakciógörbe felülről nézve homorú lesz (6.23. ábra).

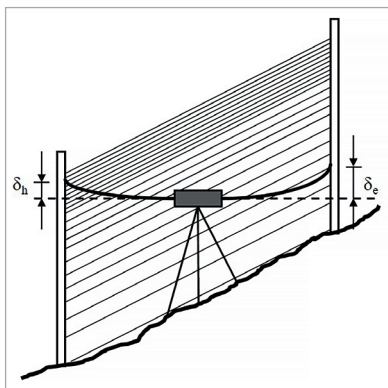
Reggel a talaj lehűl, és lehűti a környezetében lévő levegőt is. A talajtól távolodva a levegő hőmérséklete fokozatosan növekszik. Ilyenkor a refrakciógörbe felülről nézve domború lesz (6.24. ábra).



6.23. ábra: Refrakciógörbe (a szerző szerkesztése) 6.24. ábra: Refrakciógörbe (a szerző szerkesztése)

Az ábráról leolvasható, hogy a magasságkülönbségből közel vízszintes terepen a refrakcióhatás kiküszöbölhető, ha a szintezőműszerrel a lécektől egyenlő távolságban állunk fel.

A refrakciógörbe sugara a talaj közelében rohamosan változik (csökken), ezért lejtős terepen történő szintezéskor, a hátra- és előreirányzáskor a refrakcióhatásból származó hiba még középre állással sem ejthető ki (6.25. ábra). Ezt a hibát úgy tudjuk minimálisra csökkenteni, hogy a 30 cm-nél alacsonyabb lécleolvasást kerüljük, illetve ügyelünk arra, hogy az irányvonal, az irányzás teljes hosszában, ennél jobban ne közelítse meg a talajt. A refrakció a digitális műszerekre is hatással van. Az optikai műszerekkel szembeni nagy előnyük, hogy a műszer a szintezőléc egy sávját olvassa le, és korlátozható a leolvasott lécsáv magassága.



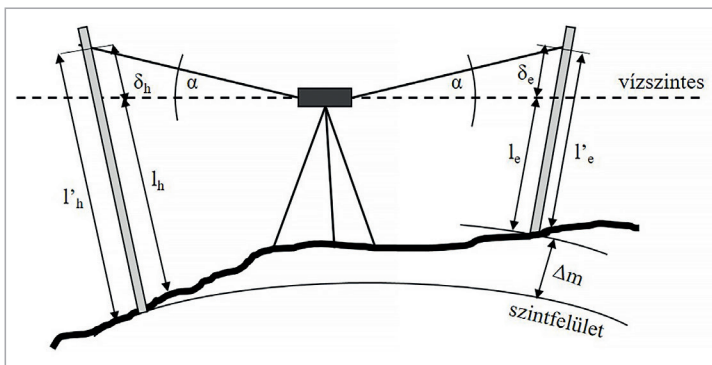
6.25. ábra: Refrakciógörbe lejtős terepen (a szerző szerkesztése)

6.4.5.3. Az alapírányvonal igazítási hibájának hatása

Az alapírányvonal igazítási hibája miatt, még abban az esetben is, ha lécleolvasás előtt gondosan függőlegessé tesszük az állótengelyt, az irányvonal nem lesz vízszintes, hanem azzal α (az igazítási hiba számértékével megegyező) nagyságú szöget zár be. Ezért a távcsőbe nézve a lécen nem az l_h és l_e értéket olvassuk, hanem l'_h és l'_e -t (6.26. ábra). Ennek megfelelően:

$$l'_h = l_h - \delta_h$$

$$l'_e = l_e - \delta_e$$



6.26. ábra: Az irányvonal igazítási hibája (a szerző szerkesztése)

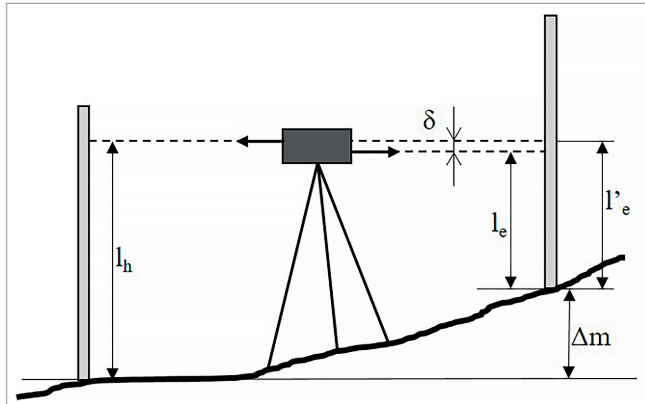
A magasságkülönbségből (Δm) ez az igazítási hiba kiesik, ha a szintezőműszert a lécektől (kötőpontoktól) egyenlő távolságban állítjuk fel, és biztosítjuk, hogy hátra- és előreirányzáskor az irányvonal a vízszintessel ugyanazt az (α) szöget zárja be. Ezt az azonosságot úgy érhetjük el, ha gondosan függőlegessé tesszük az állótengelyt.

Ezenkívül az alábbi két rontó körülményre kell még figyelni:

- Amikor a parallaxiscsavart mozgatjuk, a képállító lencse mozdul, ezáltal az irányvonal parány módon megváltozik. Az irányvonalnak ezt az elmozdulását úgy tudjuk kiküszöbölni, ha a hátra és előre leolvasás között nem nyúlunk a parallaxiscsavarhoz. (Ha egy műszerálláson belül a műszer és a léctávolságok egyenlőek, és a hátra leolvasás előtt gondosan eltüntettük a parallaxist, akkor az előreirányzáskor nem is kell hozzányúlni a parallaxiscsavarhoz.)
- A szintezőműszert érő egyenlőtlen hőhatás miatt az egyes szerkezeti elemek különbözőképpen változtatják méretüket. A paránymértékű mozgások hatására az irányvonal és az állótengely viszonya is megváltozik. (A mérés alatt a műszert a napsugarak közvetlen hatásától műszerernyővel védjük.)

6.4.5.4. A műszeresüllyedés hatása

A hátra- és az előreirányzás között, az irányvonal magassági helyzetében bekövetkezett változásakor l'_e léceleolvasás helyett az l_e értéket olvassuk le (6.27. ábra).



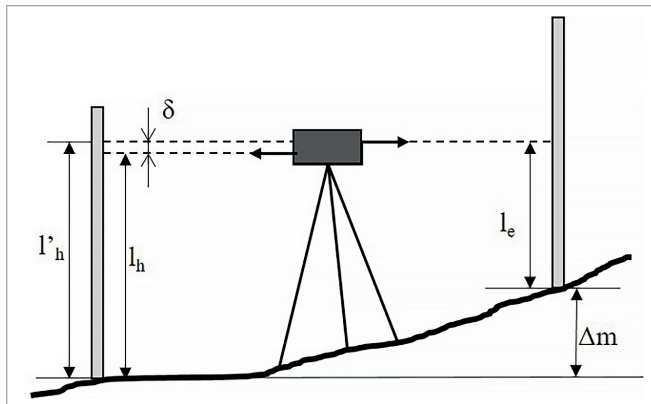
6.27. ábra: Műszersüllyedés (a szerző szerkesztése)

Így a magasságkülönbség (Δm) meghatározását δ nagyságú hiba terheli. Ugyanis a valódi magasságkülönbség a 6.26. ábra jelöléseit használva:

$$\Delta m = l_h - l'_e = l_h - (l_e + \delta) = l_h - l_e - \delta$$

Az irányvonal magasságának megváltozása az alábbi okok miatt lehet:

- a talaj a műszer és az észlelő súlyából adódó terhelés hatására süllyed;
- a talaj a műszerlábak betaposása után, a terhelés megszűnéséből adódóan rugalmasan visszahat, így megemeli a műszerlábakat;
- a műszerláb hőmérséklet-változás hatására a méretét megváltoztatja.



6.28. ábra: Műszersüllyedés (a szerző szerkesztése)

A műszersüllyedésből származó hibát csökkenthetjük, illetve kiküszöbölhetjük, ha stabil műszer-álláspontot választunk, egyenletes sebességgel és gyorsan végezzük a leolvasásokat, és oda-vissza irányú mérést végzünk. Ha feltételezzük azt, hogy a műszersüllyedés időben egyenletes, és a 6.27. ábrán bemutatott (oda) mérést ellenkező értelemben (vissza) megismételjük (6.28. ábra), akkor a műszersüllyedésből származó hiba a két magasságkülönbség átlagából kiesik.

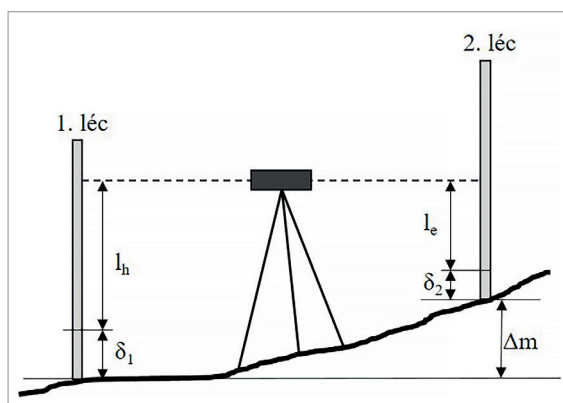
A 6.27. ábra szerinti magasságkülönbség $\Delta m = l_h - l_e - \delta$, a 6.28. ábra szerint $\Delta m = l_h + \delta - l_e$.

A gyakorlatban kétféleképpen végezhetjük az oda-vissza szintezést. Vagy műszerállásonként azonnal elvégezzük a kétirányú mérést, vagy több műszerállással elszintezünk A pontból B pontba (odamérés), majd B -ből A -ba (visszamérés) szintén több, de azonos számú műszerállással.

6.4.5.5. A szintezőléc hibái

A szintezőlécek beosztását ma már kizárólag osztógépekkel készítik, amelyek a pontossági igényeket jól kielégítik, így a szintezőlécek komparálására csak igen ritkán kerül sor.

Most nézzük a lécc talpponthebájának a magasságkülönbségre gyakorolt hatását! Ha egyetlen szintezőléccel dolgozunk, a talppontheba hatása az egy műszerállásban meghatározott magasságkülönbségből kiesik. Két szintezőléc használata esetén az egy műszerállásban meghatározott magasságkülönbség a két lécc talppontjának különbségével hibás (6.29. ábra).



6.29. ábra: Szintezőléc talpponthebája (a szerző szerkesztése)

A valós magasságkülönbség:

$$\Delta m = l_h + \delta_1 - (l_e + \delta_2) = (l_h - l_e) + (\delta_1 - \delta_2)$$

ahol $(\delta_1 - \delta_2)$ – a két lécc talpponthebájának a különbsége.

Ez a hiba ellentétes előjelűre változik, ha a két léccet felcseréljük. Az egymást követő műszerállásokban a lécek felcserélődnek, így a páros számú műszerállásban végzett szintezéssel kapott magasságkülönbség mentes a talphiba hatásától.

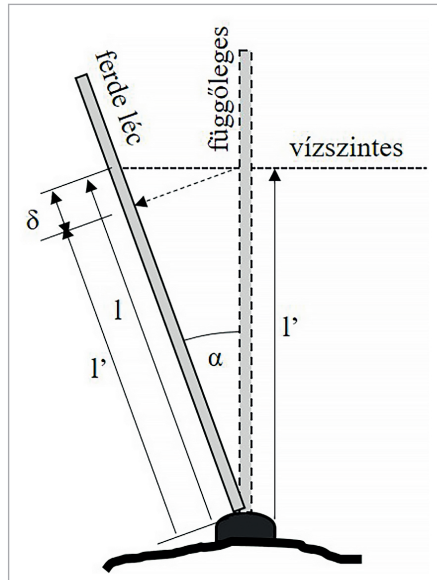
Egy lécc használata esetén mindegy a műszerállások száma, hiszen egy-egy műszerállásban meghatározott magasságkülönbségből kiesik a talppontheba:

$$\Delta m = l_h + \delta_1 - (l_e + \delta_1) = (l_h - l_e) + (\delta_1 - \delta_1) = l_h - l_e$$

Célszerű a szintezőléc talpának mindig ugyanazt a részét a mérendő pontra tenni, mivel a talppontheba kismértékben függhet ettől is például a talp egyenlőtlen kopása miatt.

6.4.5.6. A szintezőléc ferdeségének hatása

Ha a lécc a mért ponton nem áll függőlegesen, hanem ahhoz α szöget zár be, akkor a fekvőszálon nem a lécc l' értékét látjuk, hanem l -t (6.30. ábra).



6.30. ábra: Szintezőléc ferdesége (a szerző szerkesztése)

Az ábráról leolvasható: $l' = l - \delta$, ahol l a tényleges léccleolvasás, δ pedig a szintezőléc ferdeségének következtében a leolvasásra jutó hiba.

Tájékoztatásul egy 3 m-es lécc esetén a léccferdeségből származó eltérést az alábbi táblázat mutatja.

6.2. táblázat: Léccferdeségből származó eltérések mértéke (a szerző szerkesztése)

α	δ (mm)
10'	0,01
30'	0,1
1°	0,5
2°	1,8
3°	4,1

Ennek a hibaforrásnak a hatását úgy küszöböljük ki, hogy a szintezőléccet egy szelencés libella segítségével függőlegessé tesszük. A lécc libella nélkül végzett függőlegessé tételében mintegy 3° pontosságra számíthatunk. Ez a pontosság azonban csak közel vízszintes terepen, gyakorlott léccartókkal biztosítható. Ferde terepen a léccet még a leggyakorlottabb léccartók is durván nem függőlegesen, a terepre közel merőlegesen tartják, ezért ilyen körülmények között libella nélküli léccel szintezni nem szabad.

6.4.5.7. A lécsüllyedés hatása

A lécsüllyedés egyik oka a talajnak a terhelés hatására bekövetkező deformálódása, amiről már a műszersüllyedésnél beszéltünk. A másik oka az lehet, hogy a szintezőléc a 180°-os átfordítás után nem ugyanazon a ponton fekszik fel.

A szintezőlécet sohasem szabad közvetlenül a földre állítani, hanem egy olyan pontjelölésre, amely mérés alatt nem változtatja a magasságát, és egyértelmű lécátfordítást tesz lehetővé. Kötőpontok jelölésére szintezősarut vagy olyan facöveket használunk, amelynek felső lapjába gömbölyű fejú szeget verünk be. A sarut a léc ráhelyezése előtt földbe kell nyomni.

A lécet a két műszerállásból végzett mérés között nem szabad levenni a kötőpontról, hanem felemelés nélkül kell átfordítani rajta.

Tapasztalat szerint még a fenti szabályok betartása esetén is előfordulnak kismértékű lécsüllyedések.

Ellene a műszersüllyedésnél már leírt oda-vissza szintezéssel védekezünk.

6.4.6. A szintezés gyakorlati szabályai

A fentiekben a szintezés fontosabb hibaforrásaival, a hibák kiküszöbölésével, illetve hatásuk csökkentésével foglalkoztunk. Ezek függvényében a szintezés gyakorlati végrehajtásakor (első-sorban az alsórendű alappontszintezésnél) az *alábbi szabályokat kell betartani*, hogy a mérésekből a felsorolt hibák kiküszöbölhetők legyenek.

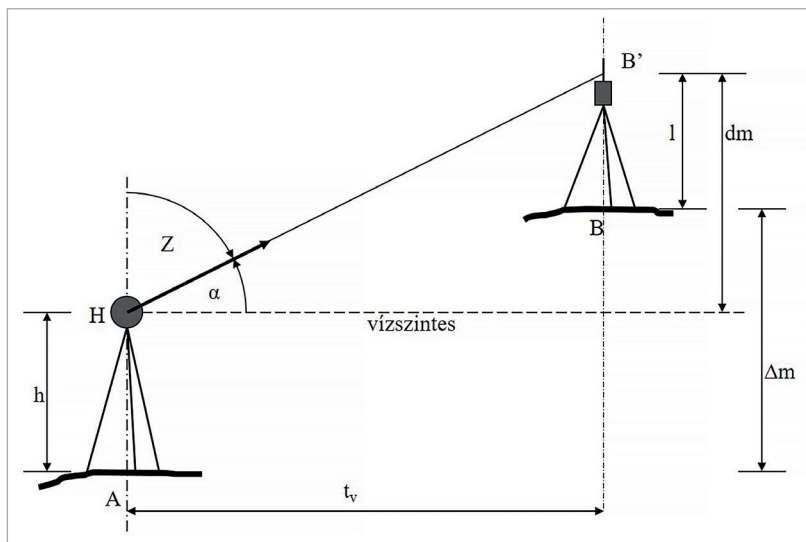
1. Szintezéshez csak vizsgált és kiigazított műszert szabad használni.
2. A szintezőműszert a kötőpontoktól egyenlő távolságban kell felállítani, illetve a kötőpontok helyét kell úgy megválasztani, hogy ez a feltétel kielégüljön.
3. A lécleolvasás alatt az állótengelynek függőlegesnek kell lennie.
4. Mérés alatt a szintezőműszert napsütéstől árnyékolni kell.
5. Észleléskor a szintezőlécet függőlegesen és mozdulatlanul kell tartani. (Kiigazított sze-lencés libella használandó.)
6. Hátra- és előreirányzás között a parallaxiscsavarhoz nyúlni nem szabad.
7. A kötőpont csak gömbölyű tetejű tárgy (például cövekbe vert szög) vagy szintezősarú lehet.
8. A kétszeres szintezés mindig oda-vissza irányban, egyenletes sebességgel végzendő.
9. Egy szintezőlécet használunk, vagy két léc használatakor páros számú műszerállást létesítünk.
10. A 30 cm-nél alacsonyabb lécleolvasást kerüljük, illetve ügyelünk arra, hogy az irányvonal, az irányzás teljes hosszában, ennél jobban ne közelítse meg a talajt.
11. A mérést csak arra alkalmas időben szabad végezni.

6.5. Trigonometriai magasságmérés

6.5.1. Alapelve

A magasságkülönbség meghatározásának másik módszere a trigonometriai magasságmérés. A magasságkülönbség valójában felfogható egy függőleges irányú hosszúságnak, ezért ha a füg-

gőleges síkban szögeket mérünk, úgy lehetőségünk nyílik a magasságkülönbség meghatározására. Ezen az elven működik a trigonometriai magasságmérés is, amely két ismert vízszintes távolságú pont magasságkülönbségét határozza meg magassági vagy zenitszög mérésével.



6.31. ábra: Trigonometriai magasságmérés (a szerző szerkesztése)

Állítsuk fel a teodolitot az A ponton, és irányozzuk meg a B ponton álló ideiglenes jelnek a B ponttól l magasságban fekvő B' pontját! Határozzuk meg a távcső irányvonalának a vízszintessel bezárt α magassági szögét!

Abban az esetben, amikor A és B pontok távolsága kisebb, mint 400 méter, azaz a szintfelületek vízszintes sikkal helyettesíthetők, és a refrakció hatása elhanyagolhatóan kicsi, akkor a 6.31. ábrából leolvasható:

$$\Delta m = h + dm - l \text{ és } dm = t_v \cdot \tan \alpha$$

tehát a B pont Δm magasságkülönbsége az A pont felett

$$\Delta m = h + t_v \cdot \tan \alpha - l,$$

illetve

$$\Delta m = (h - l) + t_v \cdot \tan \alpha$$

A magasságkülönbség számítási képlete zenitszög mérése esetén az alábbira módosul:

$$\Delta m = (h - l) + t_v \cdot \cot Z$$

ahol h – a műszermagasság,

l – a jelmagasság.

A fentiekből következik, hogy a trigonometriai magasságmérésnek két előfeltétele van:

- a két pont vízszintes távolságát ismerni vagy mérni kell;
- a két pont egymásból jól látható és irányozható legyen.

A trigonometriai magasságmérés *előnye* a szintezéssel szemben:

- alkalmas rövidebb távon nagy magasságkülönbség mérésére;
- gazdaságos, hiszen a magasságkülönbség – viszonylag nagy távolság esetén is – egy műszerálláspontról mérhető;
- alkalmas a megközelíthetetlen, de jól látható és irányozható pontok magasságának mérésére.

A trigonometriai magasságmérés *hátránya* a szintezéssel szemben a kisebb pontosság.

6.5.2. Magassági szög, zenitszög

Trigonometriai magasságmérésre alkalmas minden olyan műszer, amelynek van magassági köre. Ilyen műszerrel kétféle szöget mérhetünk: magassági szöget vagy zenitszöget. Ezekkel a fogalmakkal már a 4.4. fejezetben megismertkedtük.

6.5.2.1. A teodolit mint a magassági szögmérés eszköze

A teodolitot már megismertük mint a vízszintes szögmérés műszerét. A magassági szögmérésnél a következő geometriai feltételeknek kell teljesülniük:

- a távcső irányvonala és az álló irányzsal által meghatározott sík legyen merőleges a fekvőtengelyre;
- a fekvőtengely legyen merőleges az állótengelyre;
- az állótengely és az irányvonal metsző egyenesek (távcső központos) legyenek;
- az állótengely legyen függőleges, menjen át az állásponton (teodolit felállítása);
- magassági kör legyen merőleges a fekvőtengelyre és
- a magassági kör középpontja essen rá a fekvőtengelyre;
- a fekvőtengely és az irányvonal metsző egyenesek (a távcső magassági értelemben központos) legyenek.

6.5.3. A mérés végrehajtása

A trigonometriai magasságmérésnél kétféle módszert követhetünk.

Az egyik, amikor a műszert az ismert magasságú ponton állítjuk fel, és innen trigonometriai magasságméréssel egy vagy több, jól látható és irányozható pont magasságát határozzuk meg. A másik, ha a műszert az ismeretlen magasságú ponton állítjuk fel, és innen az ismert magasságú pontokat beirányozva határozzuk meg az álláspont magasságát.

6.5.4. Számítás

A szintfelület görbültségének és a refrakciónak együttes hatása 400 méteres távolságban éri el az 1 cm-es értéket. Ha a pontok távolsága 400 m-nél kisebb, akkor a következő összefüggéseket használjuk magassági szög esetén:

$$\Delta m = h - l + t_v \cdot \tan \alpha$$

és zenitszögmérés esetén:

$$\Delta m = h - l + t_v \cdot \cot Z$$

A refrakció hatása 4 km távolságban éri el a 10 cm körüli értéket. Ha a pontok távolsága 400 m és 4 km között van, akkor a magasságkülönbségük a 6.32. ábra alapján:

$$\Delta m = h + \delta_{sz} + dm - \delta_r - l$$

rendezve

$$\Delta m = (h - l) + dm + (\delta_{sz} - \delta_r)$$

és

$R = \delta_{sz} - \delta_r$ helyettesítéssel

$$\Delta m = (h - l) + t_v \cdot \tan \alpha + R,$$

ahol R a szintfelület-görbület és refrakció miatti együttes javítás, amelyet az

$$R = \frac{t_v^2}{2r} \cdot (1 - k)$$

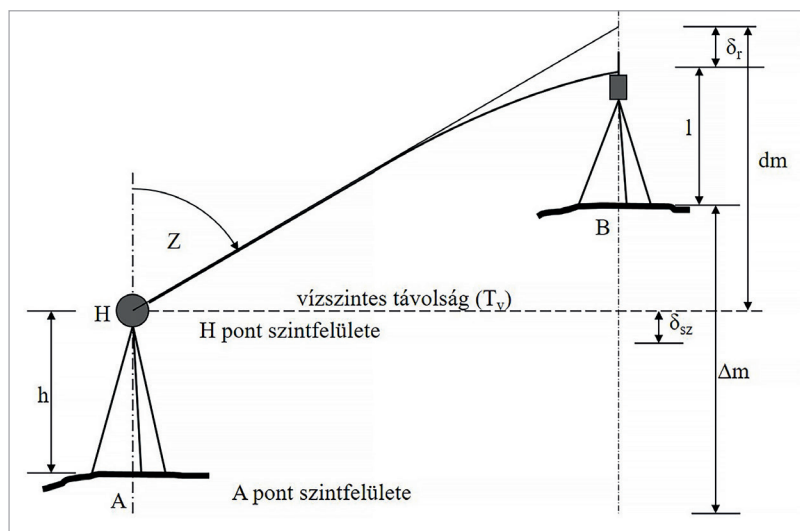
képlettel számítunk. A képletben $k = 0,13$ és $r = 6\,379\,743\text{ m}$

$$\Delta m = h - l + t_v \cdot \tan \alpha + \frac{t_v^2}{2r} \cdot (1 - k)$$

zenitszögmérésénél:

$$\Delta m = h - l + t_v \cdot \cot Z + \frac{t_v^2}{2r} \cdot (1 - k)$$

képletekkel számítható.



6.32. ábra: Trigonometriai magasságmérés 400 m-nél nagyobb távolság esetén (a szerző szerkesztése)

Ha a pontok vízszintes távolsága nagyobb, mint 4 km, akkor már a tényleges refrakcióegyüttható-értéket kell figyelembe venni. Ezt nem tudjuk szabatosan figyelembe venni, ezért hatását inkább a mérési módszer megválasztásával küszöböljük ki. Ilyen módszer a szimultán mérési módszer és a trigonometriai szintezés.

A refrakció-együttható értéke 0,13, ami a meteorológiai viszonyok következtében jelentősen változhat. Ennek következtében a refrakció okozta hatás is jelentősen változik, amit a gyakorlatban nehéz figyelembe venni. A gyakorlatban pontos magasságmérések 100 m feletti távolságon emiatt nehezen végezhetők, de erre nem is igen van szükség.

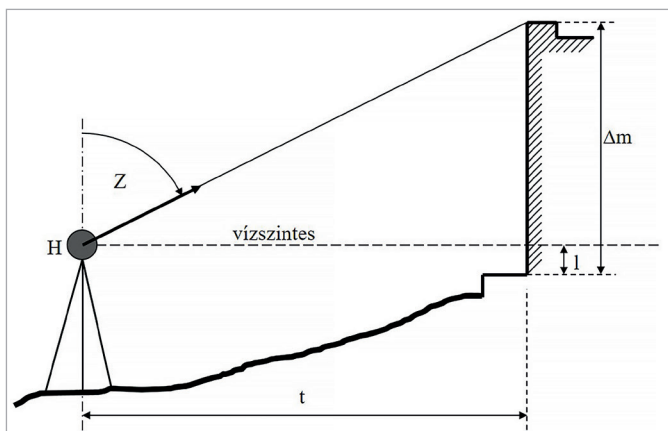
Tájékoztatásul megadjuk, hogy trigonometriai magasságmérésnél, a magasságkülönbség meghatározásánál az alábbi középhibák érhetők el:

6.3. táblázat: Elérhető középhibák trigonometriai magasságmérésnél (a szerző szerkesztése)

Távolság (tv)	Középhiba (μ)
$tv \leq 400$ m	± 1 cm
$0,4$ km $< tv \leq 2$ km	$\pm 3,5$ cm
2 km $< tv \leq 5$ km	± 10 cm

A trigonometriai magasságmérés alkalmas víztornyok, kémények, épületek magasságainak megmérésére.

A 6.33. ábra mutatja az épület magasságmérését. A műszerrel felállunk az épülettől a megméréndő magasság 2-3-szorosának megfelelő távolságban, és megmérjük a mérendő magasság első pontjára vonatkozó Z zenitszöget.



6.33. ábra: Épület magasságmérése (a szerző szerkesztése)

Az ábráról leolvasható a magasság:

$$\Delta m = l + t \cdot \cot Z$$

VÁKÁT OLDAL

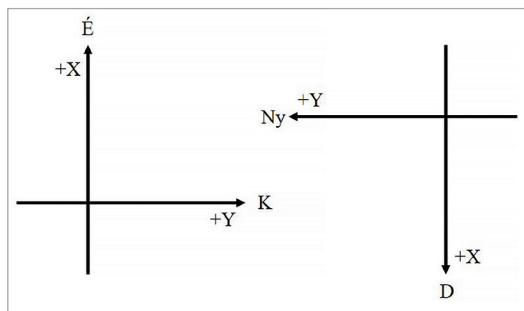
7. Síkgeometria

A geodéziában a felmérések során a számításokat a vetületi síkon végezzük.

Először a síkgeometriai alapfeladatokkal foglalkozunk, amelyek során a meghatározni kívánt pontok síkkoordinátáit számítjuk ki. A későbbiek során foglalkozunk a részletpontok vízszintes meghatározásának és az alappontsűrítésnek a módszereivel.

7.1. Alapfogalmak

A pontok helyét a vetületi síkon derékszögű koordináta-rendszerben, derékszögű koordinátákkal adjuk meg. A geodéziában a koordinátatengelyeket úgy vesszük fel, hogy az X tengely pozitív ága északi vagy déli irányba mutat attól függően, hogy milyen vetületi rendszerben végezzük a számításokat. A pozitív Y tengelyt pedig a $+X$ tengelytől 90° -ra jobbra (óramutató járásával megegyező irányba) vesszük fel. Az ilyen koordináta-rendszereket – amelyeknek $+X$ tengelye észak vagy dél felé mutat – tájékozottnak nevezzük. Kétféle – északkeleti és délnyugati – tájolású rendszert különböztetünk meg. Az északkeleti rendszerben az $+X$ tengely az északi, a délnyugati pedig a déli iránnyal esik egybe (7.1. ábra).

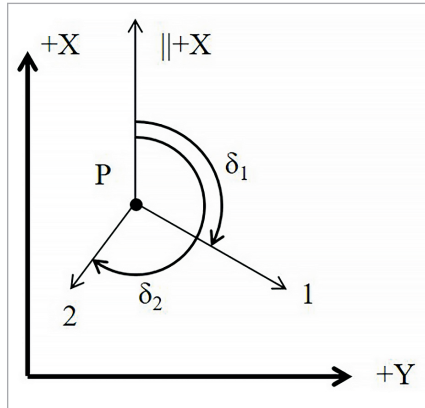


7.1. ábra: Koordináta-rendszerek (a szerző szerkesztése)

Ma már az északkeleti koordináta-rendszert használjuk, ezért ebben a koordináta-rendszerben vezetjük le a számításainkat. A számítási képletek a délnyugati rendszerben változtatás nélkül érvényesek. A geodéziában a pontok koordinátáit Y, X sorrendben adjuk meg, ez a sorrend azonos a matematikában megszokottal.

7.1.1. Az irány és az irányszög fogalma

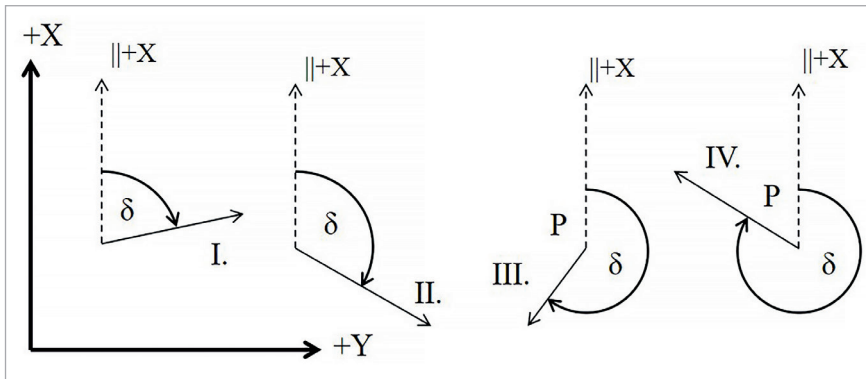
A síkban egy P ponttól távolodva irányokat jelölhetünk ki. A P pontból kiágazó irányok relatív helyzetét az egyes irányokhoz tartozó irányszöggel jellemezhetjük, amelyet mindig a koordináta-rendszer $+X$ tengelyéhez mint kezdőirányhoz viszonyítunk. Egy P pontból kiágazó irány irányszögét úgy kapjuk meg, hogy P -ből párhuzamost húzunk a $+X$ tengellyel, és az így kapott kezdőirányt az óramutató járásával egyezően a szóban forgó irányba forgatjuk (7.2. ábra).



7.2. ábra: Irányszög (a szerző szerkesztése)

Az irányszöget δ -val jelöljük, értéke $0-360^\circ$ közé esik (7.3. ábra).

Ha $0^\circ < \delta < 90^\circ$, akkor az az irány az első (I.),
 $90^\circ < \delta < 180^\circ$, akkor a második (II.),
 $180^\circ < \delta < 270^\circ$, akkor a harmadik (III.),
 $270^\circ < \delta < 360^\circ$, akkor a negyedik (IV.) síknegyedbe mutat.



7.3. ábra: Irányszögek a különböző síknegyedekben (a szerző szerkesztése)

Valamely irány ellentett irányának a vele 180° -os szöget bezáró irányt nevezzük. Az ellentett irány irányszögét az alábbi képlettel számíthatjuk:

$$\delta_2 = \delta_1 \pm 180^\circ$$

hogy pozitív, 360° -nál kisebb szög legyen (7.4. ábra).

Ha ismerjük egy pontból két irány irányszögét, akkor az általuk bezárt szöget úgy kapjuk meg, ha a jobb oldali irányból kivonjuk a bal oldali irány irányszögét (7.5. ábra):

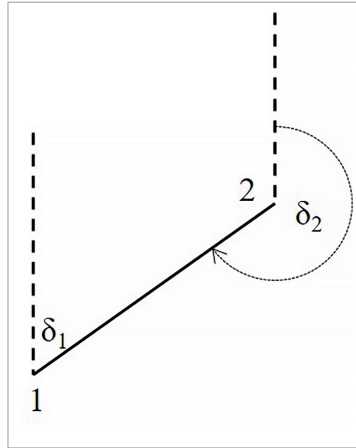
$$\varphi = \delta_2 - \delta_1$$

Ha ismerjük az egyik irányszöget és a közbezárt szöget, akkor az ismeretlen irányszög (7.5. ábra):

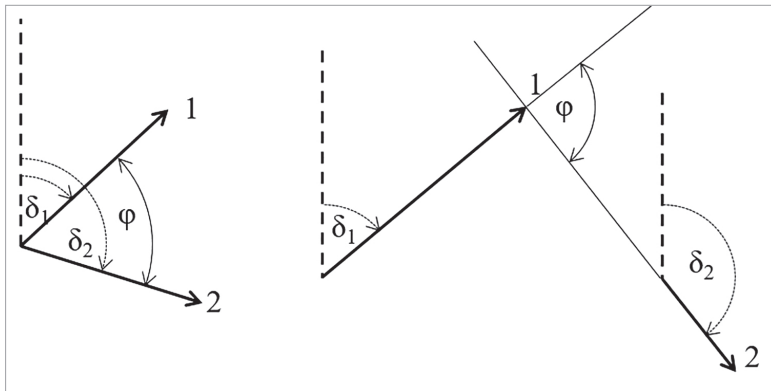
$$\delta_2 = \delta_1 + \varphi$$

$$\delta_1 = \delta_2 - \varphi$$

A két különböző pontból kiinduló irányokra is érvényesek a fenti összefüggések.



7.4. ábra: Irányszög és ellentettje (a szerző szerkesztése)



7.5. ábra: Két irány által közbezárt szög (a szerző szerkesztése)

Amikor egy adott irányszögből kiindulva, az ismertetett összefüggésekkel számítunk ki egy új irányszöget, akkor irányszögátvitelről beszélünk.

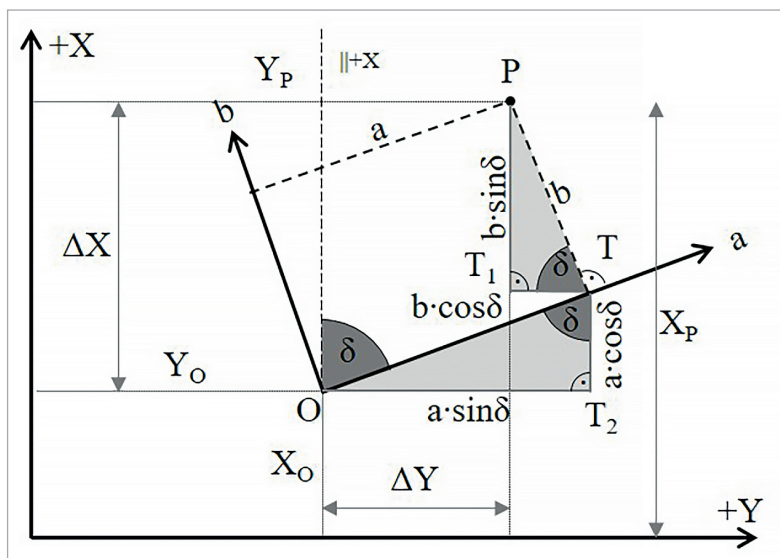
7.2. Koordinátatranszformálás

A koordinátatranszformálás során egy adott derékszögű koordináta-rendszerben ismert P pont koordinátáit meghatározzuk egy másik derékszögű koordináta-rendszerben. Ehhez ismerni kell a két derékszögű koordináta-rendszer egymáshoz viszonyított relatív helyzetét és az egyik koordináta-rendszerben a P pont derékszögű koordinátáit.

A két rendszer relatív helyzetét ismertnek tekintjük, amennyiben ismerjük az egyik rendszer kezdőpontjának $O(0,0)$ koordinátáit a másik rendszerben (Y_0, X_0) , valamint a két rendszer tengelyei által bezárt szöget, δ -t.

A gyakorlatban két esetet különböztetünk meg:

- Az első esetben adottak a P pontnak az egyik (pl. helyi) rendszerben lévő koordinátái: a, b , és keressük a másik (pl. országos) rendszerben lévő Y_P, X_P koordinátákat.
- A koordinátakülönbségeket $(\Delta Y, \Delta X)$ megkapjuk a 7.6. ábrán a TT_1P , illetve a TT_2O derékszögű háromszögek befogóinak segítségével. T pont a P pont talppontja a helyi rendszerben, míg T_1 pont a T pont P ponton keresztül X tengellyel párhuzamos egyenesre vetített pontja, és T_2 pont a T pont O ponton keresztül Y tengellyel párhuzamos egyenesre vetített pontja.



7.6. ábra: Koordinátatranszformálás (a szerző szerkesztése)

$$Y_P = Y_0 + \Delta Y$$

$$X_P = X_0 + \Delta X$$

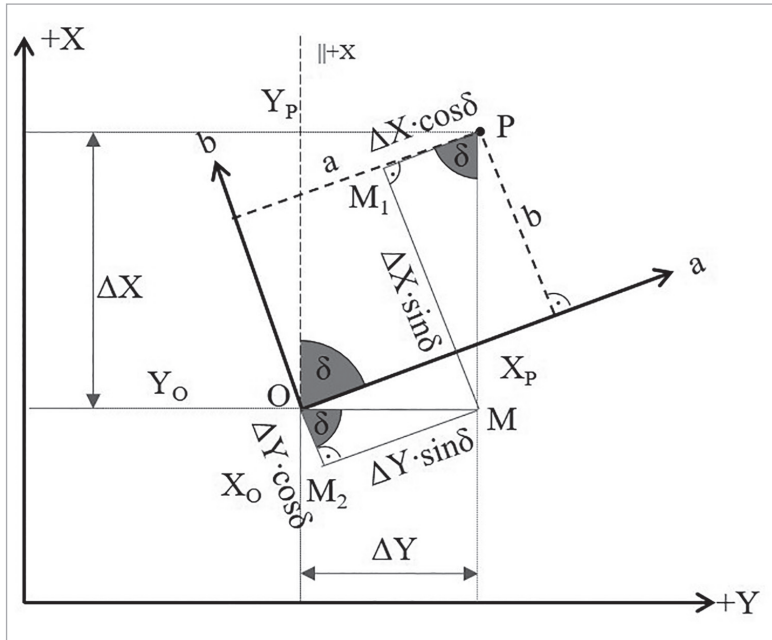
$$\Delta Y = a \cdot \sin \delta - b \cdot \cos \delta$$

$$\Delta X = a \cdot \cos \delta + b \cdot \sin \delta$$

$$Y_P = Y_0 + a \cdot \sin \delta - b \cdot \cos \delta$$

$$X_P = X_0 + a \cdot \cos \delta + b \cdot \sin \delta$$

A másik esetben adottak Y_P, X_P ; és keressük a, b -t. A koordinátakülönbségeket az MM_1P , illetve az MM_2O derékszögű háromszögek befogóinak segítségével kapjuk meg. Az első esethez hasonló módon az M pont a P ponton átmenő, az X tengellyel párhuzamos egyenes és az O ponton átmenő, Y tengellyel párhuzamos egyenes metszéspontja. Az M_1 pont a P ponton átmenő, az a tengellyel párhuzamos egyenes és az M ponton átmenő, b tengellyel párhuzamos egyenes metszéspontja. Az M_2 pont az O ponton keresztül a b tengellyel párhuzamos egyenes és az M ponton átmenő a tengellyel párhuzamos egyenes metszéspontja (7.7. ábra).



7.7. ábra: Koordinátatranszformálás (a szerző szerkesztése)

$$\begin{aligned}\Delta Y &= Y_P - Y_0 \\ \Delta X &= X_P - X_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= \Delta Y \cdot \sin \delta + \Delta X \cdot \cos \delta \\ b &= \Delta X \cdot \sin \delta - \Delta Y \cdot \cos \delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= (Y_P - Y_0) \cdot \sin \delta + (X_P - X_0) \cdot \cos \delta \\ b &= (X_P - X_0) \cdot \sin \delta - (Y_P - Y_0) \cdot \cos \delta\end{aligned}$$

A pontok koordinátái és a szögfüggvények is előjeles mennyiségek, amelyeket az egyenletek megoldásánál figyelembe kell venni!

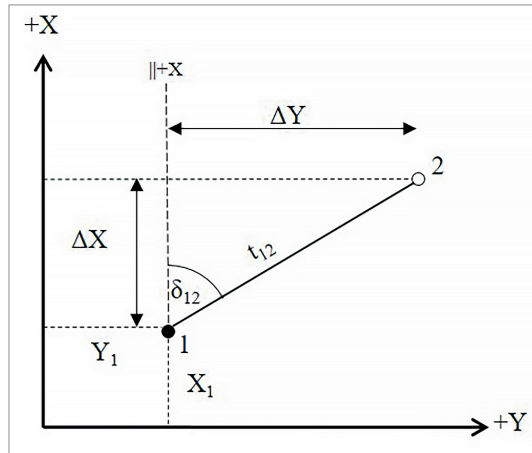
7.3. Geodéziai számítások alapfeladatai

A geodézia egyik legfontosabb feladata a pontok koordinátáinak kiszámítása. Ezekben a számításokban ismétlődően két feladat fordul elő, ezek a geodéziai számítások alapfeladatai. A koordinátaszámításban előforduló számítási feladatok erre a két alapfeladatra vezethetők vissza. Nevezetesen:

- koordinátaszámítás irányszögből és távolságból;
- irányszög- és távolságszámítás koordinátákból.

7.3.1. A geodézia első alapfeladata – Koordinátaszámítás irányszögből és távolságból

Adott az 1. számú pont koordinátaival (Y_1, X_1), az 1. és 2. számú pontok távolsága és irányszöge. Számítandók a 2. számú pont koordinátái.



7.8. ábra: A geodézia első alapfeladata (a szerző szerkesztése)

Az 7.8. ábrából felírható:

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 + \Delta Y \\ X_2 &= X_1 + \Delta X \end{aligned}$$

Az ábrán látható ΔX , ΔY , t_{12} derékszögű háromszögből felírható:

$$\begin{aligned} \Delta Y &= t_{12} \cdot \sin \delta_{12} \\ \Delta X &= t_{12} \cdot \cos \delta_{12} \end{aligned}$$

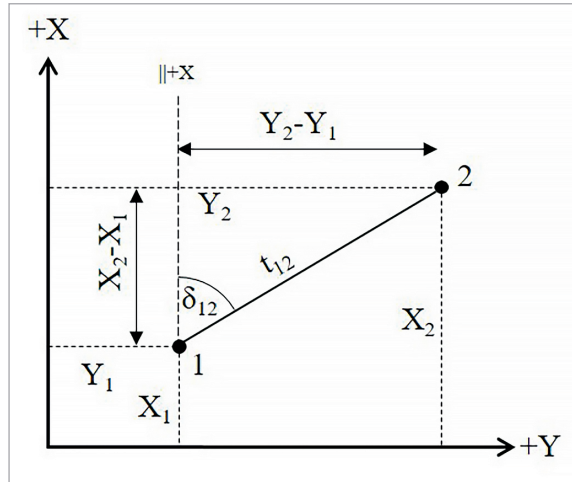
Tehát:

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 + t_{12} \cdot \sin \delta \\ X_2 &= X_1 + t_{12} \cdot \cos \delta \end{aligned}$$

Mind a koordináták, mind a szögfüggvények előjeles mennyiségek. A szögfüggvények előjele attól függ, hogy az irányszög melyik síknegyedbe mutat.

7.3.2. A geodézia második alapfeladata – Irányszög és távolság számítása koordinátákból

Ez a feladat a geodézia első feladatának inverze. Adottak az 1. és 2. számú pontok koordinátaikkal (Y_1, X_1) (Y_2, X_2) , számítandó a két pont távolsága (t_{12}) és az irányszöge $(\delta_{12}, \delta_{21})$



7.9. ábra: A geodézia második alapfeladata (a szerző szerkesztése)

Itt a két pont koordinátái adottak. Az 7.9. ábrán látható háromszög befogói számíthatók.

$$\begin{aligned}\Delta Y &= Y_2 - Y_1 \\ \Delta X &= X_2 - X_1\end{aligned}$$

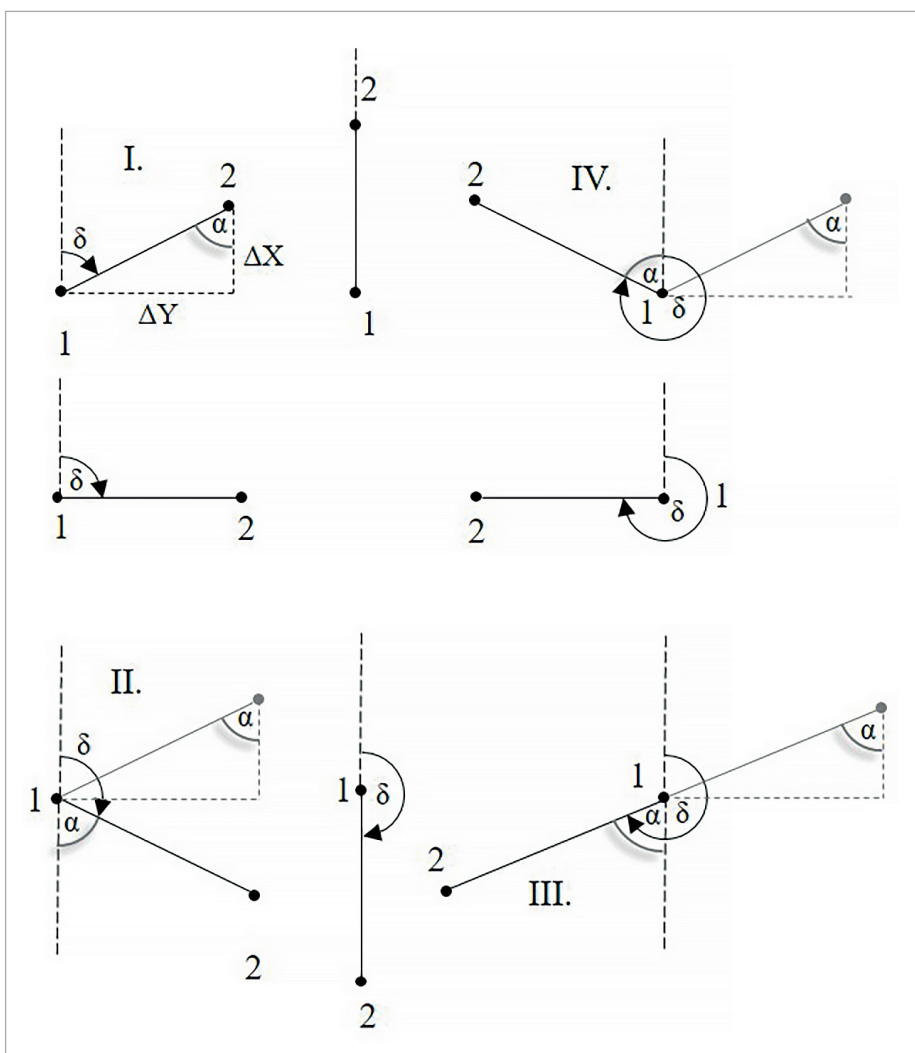
A derékszögű háromszögből

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

amiből

$$\delta_{12} = \operatorname{arctg} \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Az „arctg” függvény eredményeként -90° és $+90^\circ$ közötti értéket kapunk. Az irányszög viszont $0-360^\circ$ közé eshet. A koordinátakülönbségek előjeléből már előre megállapítható, hogy a szóban forgó irány melyik síknegyedbe mutat. Jelöljük „arctg” 0° és 90° közé eső értékét α -val, ekkor az irányszöget (δ) a 7.10. ábra alapján és az 7.1 táblázat szerint számítjuk.



7.10 ábra: Irányszög és főérték kapcsolata (a szerző szerkesztése)

7.1. táblázat: Irányszög és főérték kapcsolata (a szerző szerkesztése)

		δ		
$\Delta X \backslash \Delta Y$		+	0	-
+		α	0°	$360^\circ - \alpha$
0		90°		270°
-		$180^\circ - \alpha$	180°	$180^\circ + \alpha$

A két pont távolságát számíthatjuk közvetlenül a koordinátákból:

$$t_{12} = \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2}$$

vagy

kis extrapoláció esetén:

$$t_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{\sin \delta_{12}}$$

nagy extrapoláció esetén:

$$t_{12} = \frac{X_2 - X_1}{\cos \delta_{12}}$$

Az utóbbi kettő közül az adja a pontosabb eredményt, amelyik számlálójának abszolút értéke nagyobb.

VÁKÁT OLDAL

8. A részletpont-meghatározás módszerei

A részletpontok felmérését az alappontokra támaszkodva végezzük el. A felméréndő részletpontok lehetnek birtokhatárpontok, művelési ágak határpontjai, természetes vagy mesterséges alakulatok jellemző alakjelölő pontja, a terep jellemző pontjai stb. Mennyiségük mindig a felméréndő terület adottságaitól és a felmérés céljától függ.

A részletmérés alapelve, hogy a részletpontokat mindig a hozzájuk legközelebb eső alappontokhoz viszonyítva határozzuk meg, és ellenőrző méréseket végzünk.

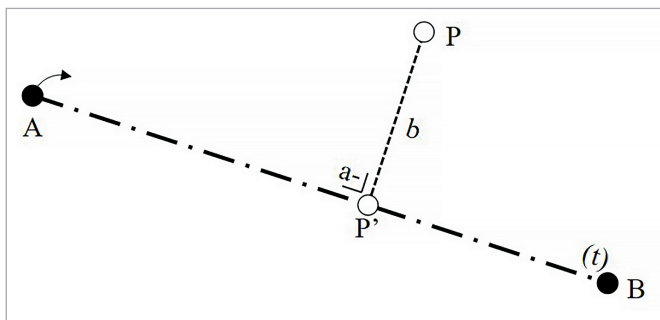
A részletmérési eljárások közül a gyakorlatban leginkább használatos a derékszögű (ortogonális) koordinátamérés és a poláris koordinátamérés. A továbbiakban ezekkel a numerikus eljárásokkal fogunk foglalkozni.

Amennyiben a poláris koordinátamérést tahiméterrel mérjük, tahimetrálásról beszélünk. Ez az eljárás magasságok meghatározását is lehetővé teszi, így a részletpontok térbeli helyzetét tudjuk meghatározni. Ma már a tahiméterek modern változatát, a mérőállomásokat használjuk részletpontmérésekhez.

A részletmérés megkezdése előtt először alappontokat létesítünk, amelyeket állandósítunk. Ha az így kifejlesztett alapponthálózat nem elég sűrű a mérések végrehajtásához, akkor a mérésekkel egy időben további alappontokat szükséges meghatározni. Ezeket kisalappontoknak nevezzük, és a mérendő részletpontok ismeretében a helyszínen megtervezzük és kitűzzük a helyüket.

8.1. Derékszögű koordinátamérés

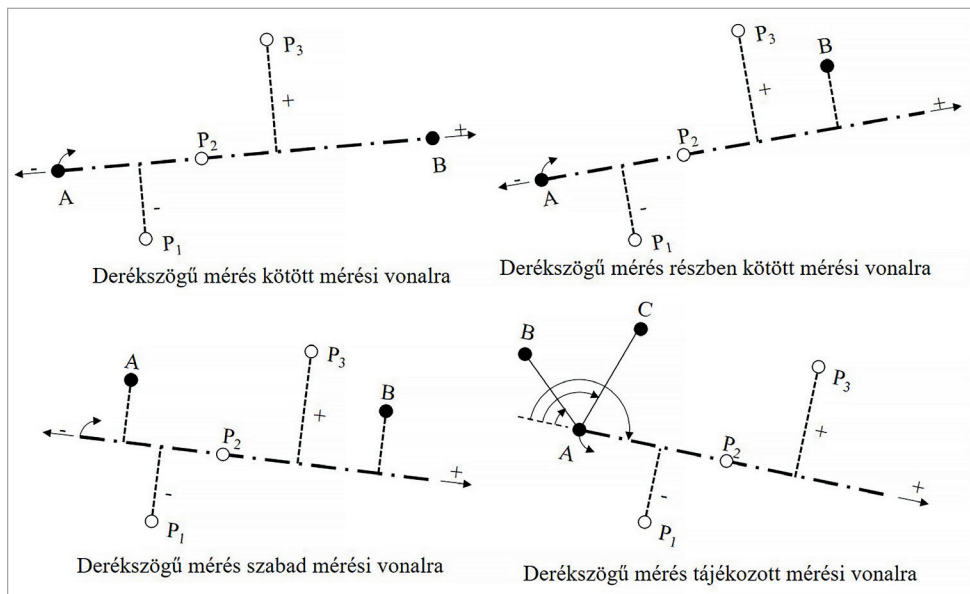
A derékszögű koordinátamérés (ortogonális koordinátamérés) alapelve az, hogy a részletpontok közelében lévő két ismert alappont egyenesére merőlegesen levetítjük a felméréndő pontot, azaz megkeressük a részletpont talppontját. A mérési vonalon megmérjük az egyik ismert ponttól a talppontig terjedő távolságot, az abszcisszát (a), valamint a talpponttól a részletpontig terjedő távolságot, az ordinátát (b) (8.1. ábra).



8.1. ábra: Derékszögű koordinátamérés (a szerző szerkesztése)

8.1.1. Derékszögű koordinátamérés végrehajtása

A derékszögű koordinátaméréskor első lépésként kitűzzük a mérési vonalat, és ennek egyenesébe fektetünk egy mérőszalagot úgy, hogy kezdőpontja egybeessen a mérési vonal kezdőpontjával. A lefektetett szalag mellett a kettős szögprizmával megkeressük azoknak a részletpontoknak a talppontját, amelyek az első szalagfekvésen belül esnek, mégpedig a mérési iránynak megfelelő sorrendben. Megmérjük a pontok abszcissa- és ordinátaértékeit. A mérési eredményeket mérési jegyzeten tüntetjük fel. Az abszcissaértékeket a kezdőponttól kiindulva folytatólagosan olvassuk le.



8.2. ábra: Mérési vonalak (a szerző szerkesztése)

Ha az első szalagfekvésen belül eső valamennyi részletpontot bemértük, a mérőszalagot a szalagmérés szabályainak megfelelően továbbvisszük. A mérési vonal végpontjánál a szalagon leolvassuk a végméretet. Amennyiben szükséges, a mérési vonal meghosszabbításában is végezhetünk bemérést. A meghosszabbítás legfeljebb a mérési vonal $\frac{1}{3}$ -a lehet. A meghosszabbításon végzett leolvasásokat is a kezdőponttól kiindulva folytatólagosan végezzük. A részletpontokat mindig a legközelebbi mérési vonalról, azaz minél rövidebb ordinátával mérjük meg. Egy tereptárgynak a pontjait lehetőség szerint ugyanarról a mérési vonalról kell lemérni. Ám ellenőrző mérésekre szükség van, amelyeket már egy másik alapvonalról is elvégezhetünk. Az egy egyenes vonalba eső részletpontok bemérését úgy végezzük, hogy csak az egyenes kezdő- és végpontját mérjük derékszögű koordinátaméréssel, az egyenesben lévő többi pontot pedig ezek között folytatólagos méréssel. Ez azért szükséges, hogy ami a valóságban egyenes, az egyenes maradjon a térképen is. Épületeknek mindig a hosszabbik oldalát kell megmérni. Épületeknél csak annyi pontot szabad mérni, amennyi az épület megszerkesztéséhez feltétlenül szükséges. Ha az épületen több ki-be ugrás van, akkor csak az uralkodó falsík végpontjait mérjük be, a többi pontot pedig ezen pontok között határozzuk meg. A földfelszín feletti pontokat levetítjük a földfelszínre, és azokat mérjük.

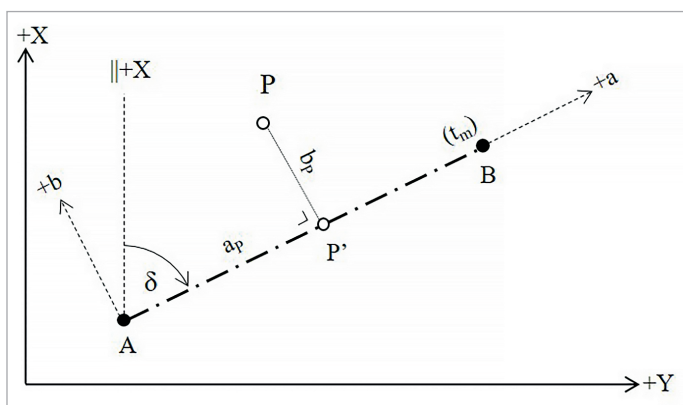
Íves vonalaknál annyi pontot kell megmérni, hogy az ívet egyenes szakaszokkal a megkívánt pontossággal ábrázolni tudjuk.

A mérések végrehajtásakor előfordulhat olyan eset, hogy az alappontokat összekötő mérési vonalak kitűzése valamilyen akadály miatt nem lehetséges. Ilyenkor az alapvonalat más módon is kitűzhetjük. Beszélhetünk kötött mérési vonal mellett még részben kötött, szabad és tájékozott mérési vonalról (8.2. ábra). Ebben az esetben azonban mindenképp be kell mérni az alappontokat is a mérési vonalra.

A derékszögű koordinátamérés feldolgozásakor először elkészítjük – a mérési jegyzetek alapján – a mérési vázlatot. A mérési vázlat a mérési jegyzet méretarányhelyes változata, amelyre az alappontokat koordinátaik, a kialappontokat mérési adataik, a részletpontokat az abszcissa- és ordinátaértékeik alapján szerkesztjük fel. Elkészítésének célja, hogy kiderüljenek az esetleges hiányosságok, és azokat pótolni lehessen. Célszerű a mérések befejezésekor, még terepi körülmények között elkészíteni.

8.1.2. A bemért pontok koordinátáinak számítása

Az irodai feldolgozás általában a részletpontok geodéziai rendszerbeni koordinátáinak kiszámításával kezdődik, amit síkbeli koordinátatranszformációval végzünk (lásd 7. fejezet).



8.3. ábra: Derékszögű koordinátamérés számítása (a szerző szerkesztése)

A kiinduló rendszer egy helyi rendszer (a, b) , a célrendszer pedig az országos koordináta-rendszer (Y, X) .

A 8.3. ábrán a mérési vonal kezdőpontja $A (Y_A, X_A)$, a végpontja pedig $B (Y_B, X_B)$, az országos koordináta-rendszerben koordinátaikkal adottak. A P pont a abszcissa- és b ordinátaértékei a terepi mérésekből ismertek. Ezen adatok alapján meg kell határoznunk a P pont Y és X koordinátáját.

A koordinátatranszformáció képletei alapján:

$$Y_P = Y_A + a \cdot \sin \delta - b \cdot \cos \delta$$

$$X_P = X_A + a \cdot \cos \delta + b \cdot \sin \delta$$

Mivel a méréseinket mérési hibák, a koordinátákat kerethibák terhelik, ezért a terepen mért végméret és a koordinátákból számított végméret általában nem egyezik meg egymással. Az alaponthálózat és a részletmérési adatok között az összhangot egy úgynevezett méretarány-tényezővel (m) teremtyük meg.

$$m = \frac{t_{sz}}{t_m}$$

ahol t_{sz} – a koordinátákból számított távolság,

t_m – a mért távolság (végméret).

$$t_{sz} = \frac{\bar{Y}_B - \bar{Y}_A}{\sin \delta} \quad \text{vagy} \quad t_{sz} = \frac{X_B - X_A}{\cos \delta},$$

a helyettesítést elvégezve:

$$m = \frac{Y_B - Y_A}{t_m \cdot \sin \delta} \quad \text{vagy} \quad m = \frac{X_B - X_A}{t_m \cdot \cos \delta}$$

A transzformációs képletekben szereplő a és b mérési adatokat a méretarány-tényezővel (m) beszorozva biztosítjuk az összhangot.

$$Y_P = Y_A + a \cdot m \cdot \sin \delta - b \cdot m \cdot \cos \delta$$

$$X_P = X_A + a \cdot m \cdot \cos \delta + b \cdot m \cdot \sin \delta$$

behelyettesítve a méretarányszorzó megfelelő alakját:

$$Y_P = Y_A + \frac{a \cdot \sin \delta \cdot (Y_B - Y_A)}{t_m \cdot \sin \delta} - \frac{b \cdot \cos \delta \cdot (X_B - X_A)}{t_m \cdot \cos \delta}$$

$$X_P = X_A + \frac{a \cdot \cos \delta \cdot (X_B - X_A)}{t_m \cdot \cos \delta} + \frac{b \cdot \sin \delta \cdot (Y_B - Y_A)}{t_m \cdot \sin \delta}$$

$$Y_P = Y_A + \frac{a \cdot (Y_B - Y_A)}{t_m} - \frac{b \cdot (X_B - X_A)}{t_m}$$

$$X_P = X_A + \frac{a \cdot (X_B - X_A)}{t_m} + \frac{b \cdot (Y_B - Y_A)}{t_m}$$

Legyen

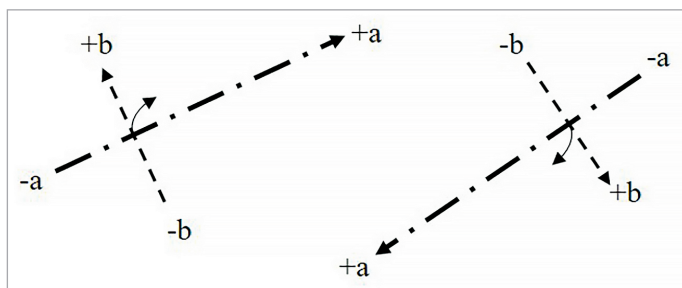
$$r = \frac{Y_B - Y_A}{t_m} \quad \text{és} \quad s = \frac{X_B - X_A}{t_m}$$

Ekkor P pont koordinátája:

$$Y_p = Y_A + r \cdot a - s \cdot b$$

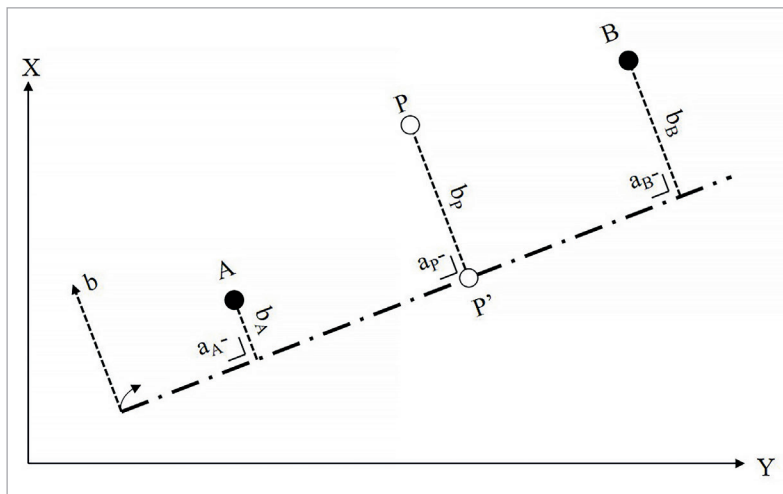
$$X_p = X_A + s \cdot a + r \cdot b$$

Derékszögű koordinátamérés végrehajtásakor nagyon kell figyelni az abszcissa- és az ordinátamérések előjelére. Ha a mérési vonal kezdőpontjától a végpont felé nézünk, akkor az előre irányban értelmezzük az abszcisszaméreket pozitív előjellel, hátrafelé pedig negatív előjellel. Az ordinátamérések jobbra negatívak, balra pedig pozitívak (8.4. ábra).



8.4. ábra: Az ordinátamérések értelmezése (a szerző szerkesztése)

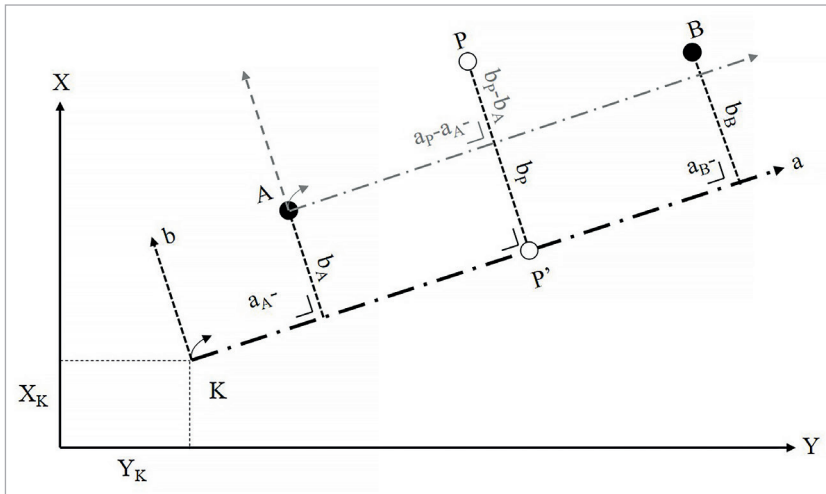
Mint már említettük, a gyakorlati mérések során előfordul, hogy nem tudunk mérési vonalat létesíteni közvetlenül az A és B országos koordinátákkal adott pontok között. Ebben az esetben a mérési vonalat eltolva, tetszőlegesen vesszük fel.



8.5. ábra: Szabad mérési vonal (a szerző szerkesztése)

Ezt a vonalat nevezzük szabad vonalnak. Ebben az esetben a mérési vonal kezdő- és végpontjának kijelölése tetszőleges lehet. Ilyenkor a részletpontok abszcissa- és ordinátaméretein kívül az A és B pontok abszcissa- és ordinátaértékeit is meg kell mérnünk. A számítás hasonló az egyszerű derékszögű koordinátaméréshez, a 8.5. ábra és az alábbi képletek magyarázzák.

A gyakorlatban számítjuk minden egyes pont kezdőpontra (A) vonatkozó abszcissza- és ordinátakülönbségét, majd az r és s paramétereket, valamint a mérési vonal hosszát a mérési eredményekből és a koordinátákból (8.6. ábra).



8.6. ábra: Szabad mérési vonal számítása (a szerző szerkesztése)

$$Y_A = Y_K + r \cdot a_A - s \cdot b_A$$

$$X_A = X_K + s \cdot a_A + r \cdot b_A$$

$$Y_B = Y_K + r \cdot a_B - s \cdot b_B$$

$$X_B = X_K + s \cdot a_B + r \cdot b_B$$

Képezzük az A és B pontok koordinátakülönbségeit:

$$Y_B - Y_A = r \cdot (a_B - a_A) - s \cdot (b_B - b_A)$$

$$X_B - X_A = s \cdot (a_B - a_A) + r \cdot (b_B - b_A)$$

$$\Delta Y = r \cdot \Delta a - s \cdot \Delta b$$

$$\Delta X = s \cdot \Delta a + r \cdot \Delta b$$

A ΔY -ból s kifejezve:

$$s = \frac{r \cdot \Delta a - \Delta Y}{\Delta b}$$

Ezt behelyettesítve ΔX -be és kifejezve r -t:

$$\Delta X = \frac{r \cdot \Delta a - \Delta Y}{\Delta b} \cdot \Delta a + r \cdot \Delta b = \frac{r \cdot \Delta a^2 - \Delta Y \cdot \Delta a + r \cdot \Delta b^2}{\Delta b}$$

$$\Delta X \cdot \Delta b = r \cdot \Delta a^2 - \Delta Y \cdot \Delta a + r \cdot \Delta b^2 = r \cdot (\Delta a^2 + \Delta b^2) - \Delta Y \cdot \Delta a$$

$$r = \frac{\Delta Y \cdot \Delta a + \Delta X \cdot \Delta b}{\Delta a^2 + \Delta b^2}$$

8.2. Poláris koordinátamérés

A poláris koordinátamérés az a mérési módszer, amikor az új pontokat poláris koordinátáikkal (szög és távolság) határozzuk meg. A mérés úgy történik, hogy egy szögmérő műszerrel (leginkább mérőállomással) felállunk egy ismert koordinátájú ponton, és megirányozunk egy vagy több másik ismert koordinátájú pontot, ezt nevezzük tájékozásnak. A tájékozással meghatározzuk a limbusz kör nulla osztásvonásának az északi iránnyal bezárt szögét. Ezután beirányozzuk a részletpontokat, és az irányok leolvasása mellett meghatározzuk az álláspont (alappont) és a részletpont közötti távolságot.

Ezekből az adatokból a pont két vízszintes koordinátája meghatározható. Abban az esetben, ha a zenitszöget is mérjük, a pont magassága is számítható.

Míg a derékszögű koordinátamérés technológiája az utóbbi évtizedekben nem nagyon változott, addig a poláris koordinátamérés a mérőműszerek korszerűsödését folyamatosan követte. Ma a poláris részletmérés a részletmérés egyik leggyakoribb módszere, mivel az ehhez a méréshez használatos korszerű mérőállomások széles körben elterjedtek. A mérőállomások távmérő részeinek hatótávolsága több száz méter, így egy jó kilátású helyről nagy területet lehet felmérni. A mérés pontossága jellemzően pár centiméter, de megfelelő körülmények között lehet ennél kedvezőbb is.

A poláris koordinátamérés végrehajtásakor gyakran akadályt jelent a műszer ismert alappontra való felállítása. Ebben legalább 2, de inkább 3-5 ismert koordinátájú pontra történő méréssel határozzuk meg az álláspont koordinátáit, magasságát és tájékozását. Megfelelő számú fölös mérés és geometria esetén a meghatározott adatok pontossága is jól becsülhető. A mérőállomások támogatják az ismeretlen vagy más szóhasználattal szabad álláspont meghatározását.

8.2.1. Polárisan bemért részletpontok koordinátáinak számítása

Először az álláspont és a tájékozó pontok koordinátáinak és a tájékozó irányokra mért irányértékek felhasználásával tájékozunk a limbuszt. Az álláspont tájékozása az egyik legalapvetőbb feladat a geodéziában. Méréseinket az álláspont tájékozásával illesztjük be egy adott rendszerbe.

Ha az egy pontból kiinduló irányok egymáshoz viszonyított helyzetét szögméréssel határozzuk meg, akkor a mérés eredményeként a mért irányok *irányértékeit* (i) (8.7. ábra) kapjuk meg. Az irányérték az I. és II. távcsőállásban tett leolvasások középértéke, az irányoknak a limbusz nulla osztásával bezárt szöge.

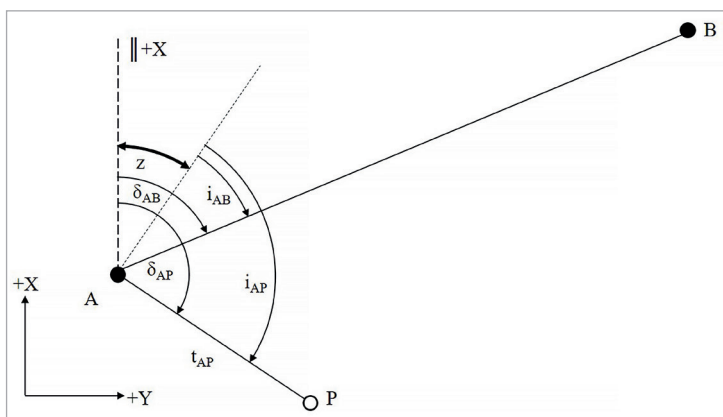
A számítások során azonban a kérdéses meghatározó irány *irányszögére* (az északi iránnyal bezárt szögére) van szükségünk. Az ábráról leolvasható, hogy ha a mérési eredményekből ki tudjuk számítani az ábrán z -vel jelölt szöget (a limbusz nullájának az irányszögét), akkor

$$\delta = z + i$$

összefüggéssel számítható a mért irány tájékozott irányértéke.

A számítási műveletet az *íránymérések tájékozásának*, a számított z mennyiséget *tájékozási szögnek* és a δ_p -vel jelölt szöget *tájékozott irányértéknek* (amely geometriai értelmezésben megegyezik az irányszöggel) nevezzük.

A tájékozott irányértéket az irányszögtől élesen meg kell különböztetni annak ellenére, hogy két számérték ugyanarra az irányra vonatkozik. Az irányszög koordinátákból számított érték, a tájékozott irányérték mérésekből levezetett, hiszen az irányérték (i) és a tájékozási szög (z) is mérésekből számított érték.



8.7.ábra: Tájékozás (a szerző szerkesztése)

A tájékozási szög (z) vagy több tájékozó irány esetén a középtájékozási szög (z_k) ismeretében számítjuk az egyes részletpontok tájékozott irányértékét:

$$\delta_P = z + i_P$$

ahol δ_P – a P pont tájékozott irányértéke

z – a tájékozási szög

i_P – a P pont irányértéke

A tájékozott irányérték és a mért távolság felhasználásával meghatározzuk a részletpontok koordinátáit a geodézia első alapeladatával:

$$Y_P = Y_A + t_P \cdot \sin \delta_P$$

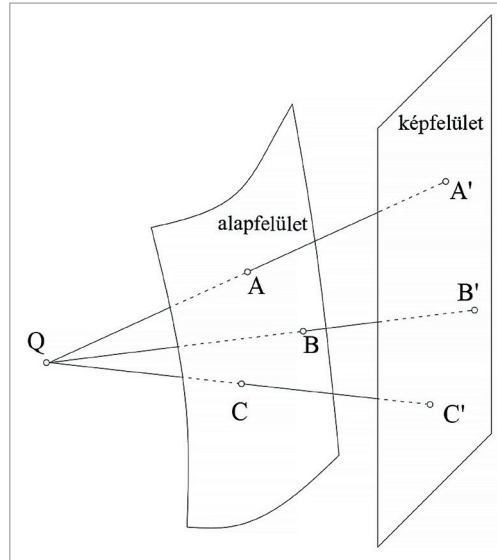
$$X_P = X_A + t_P \cdot \cos \delta_P$$

9. Vetületi ismeretek

9.1. A vetítés

A geodéziai méréseket a Föld felszínén végezzük, de miután ez szabálytalan felület, ezért egy alapfelületet választunk (forgási ellipszoid), és a szög mérés és távolságmeghatározás eredményeit redukciók segítségével erre a felületre vetítjük. Az alapfelületi koordináták meghatározásához – az alapfelületre redukált mérési eredményekkel – meglehetősen bonyolult számításokat kell végeznünk az alapfelületen. Csak az I. rendű alappontokat számítjuk így. Választunk egy – az alapfelülettel matematikai kapcsolatban álló – síkot képfelületnek, és a további alappontok és a részletpontok meghatározását ezen a síkon végezzük. A kapcsolatteremtést vetítésnek, az ehhez szükséges matematikai összefüggéseket vetületi egyenleteknek, azt a felületet, amelyről a vetítés történik, alapfelületnek, magát a síkot, amire vetítünk, képsíknak vagy más néven vetületi síknak nevezzük.

Vetítésről a szó szoros értelmében akkor beszélünk, amikor egy kijelölt vetítési központból (ami a végtelenben is lehet) kiinduló és az alapfelületen lévő ponton átmenő irány sugarakkal a pont képét a képfelületen kidöfjük (9.1. ábra), azaz a pont képe geometriai úton előállítható. Ezt perspektív vetítésnek nevezzük. A geometriai kapcsolatot matematikailag is ki tudjuk fejezni, ezért elmondható, hogy a perspektív vetítés során a kép mind geometriailag, mind matematikailag előállítható. Akkor is vetítésről beszélünk, amikor nem jelölünk ki vetítési központot, és a pont képe csak matematikai úton vetületi egyenletekkel határozható meg.

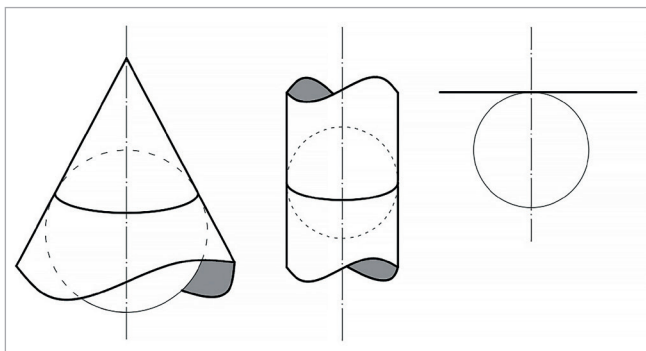


9.1. ábra: Perspektív vetítés (a szerző szerkesztése)

A Magyarországon használt vetületek közös jellemzője a kettős vetítés. Először a forgási ellipszoidról az ellipszoidhoz simuló gömbre vetítünk. A második vetítés alapfelülete a simuló gömb, képfelülete pedig a sík vagy síkba fejthető felület (9.2. ábra).

A geodéziában csak azok a vetítések, illetve vetületi egyenletek alkalmazhatók, amelyeknél:

- az alapfelületi pontnak egy és csak egy képfelületi pont felel meg;
- a függvények folytonosak és differenciálhatók;
- a torzulások egy határértéket nem léphetnek túl.



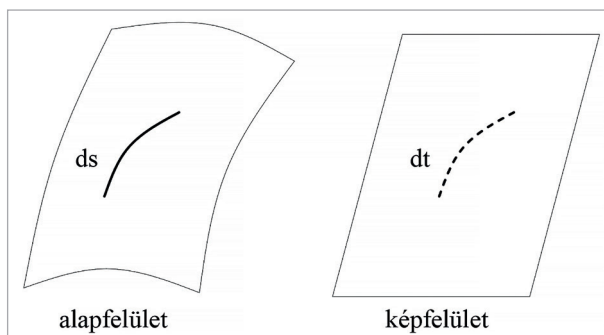
9.2. ábra: Síkba fejthető felületek (a szerző szerkesztése)

9.2. A vetítés során fellépő torzulások

A vetítés mindig torzulásokkal jár, mert az alapfelület (ellipszoid, gömb) gyűrődések és/vagy szakadások nélkül nem fektethető ki a síkba. Ezek a torzulások a geodéziai mérések alapelemeit, a szögeket, a hosszakat és a területeket érintik. A torzulások mértékét modulusokkal jellemezzük.

A lineármódulus az alapfelület valamely pontjánál levő elemi hosszúságú vonaldarab ds hosszának és képfelületi megfelelője, dt hosszának viszonya:

$$l = \frac{dt}{ds}$$



9.3. ábra: Elemi vonaldarab és képe (a szerző szerkesztése)

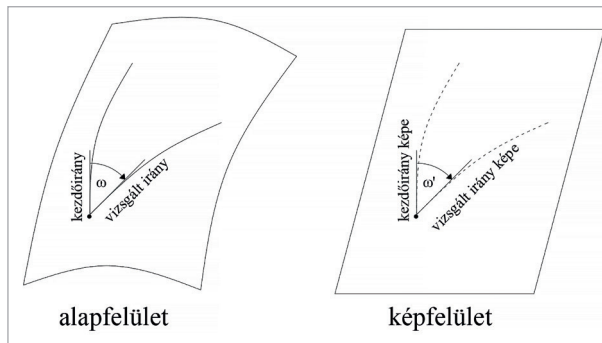
A hossztorzulás általában pontonként és irányonként is változik. A lineármódulus egy vetületen belül is a helynek és az iránynak a függvénye.

Ha valamely irány az alapfelületen egy kezdőiránnyal ω , a képfelületen levő megfelelője a kezdőirány megfelelőjével ω' szöget zár be, akkor az iránymodulust az

$$i = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega}$$

hányados fejezi ki (9.4. ábra), ahol ω -t irányelhajlásnak nevezzük.

Ha kezdőiránynak azt az irányt választjuk, amelyben az adott ponton a lineármódulus a legnagyobb – ezt nevezzük első vetületi főiránynak –, akkor az iránymodulus egy-egy pontban állandó, de pontonként általában változó.



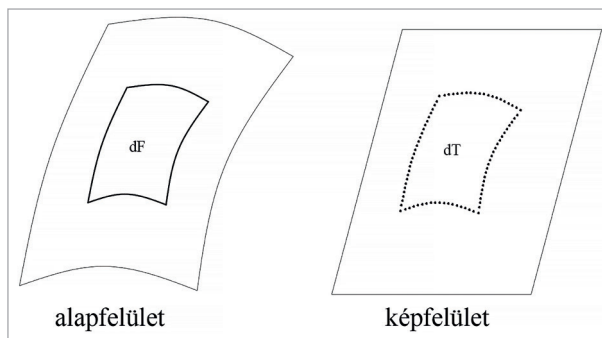
9.4. ábra: Irányhajlás (a szerző szerkesztése)

A $\Delta = \omega' - \omega$ értéket első irányredukciónak nevezzük.

Szögtartó vetületeknél a szögek nem változnak ($\omega = \omega'$), az iránymodulus minden pontban az egységgel egyenlő ($i = 1$). Ezekre jellemző, hogy az alapfelületen lévő idom és képe egymáshoz hasonlóak, az oldalak arányosan torzulnak.

A területi modulus az elemi nagyságú alapfelületi dF terület és képfelületi dT megfelelőjének a hányadosa (9.5. ábra).

$$\tau = \frac{dT}{dF}$$



9.5. ábra: Elemi nagyságú alapfelületi idom és képe (a szerző szerkesztése)

A területtorzulási viszonyt már a hossztorzulási és szögtorzulási viszonyok megszabják, mivel a területtorzulás a hosszak és szögek torzulásának a függvénye.

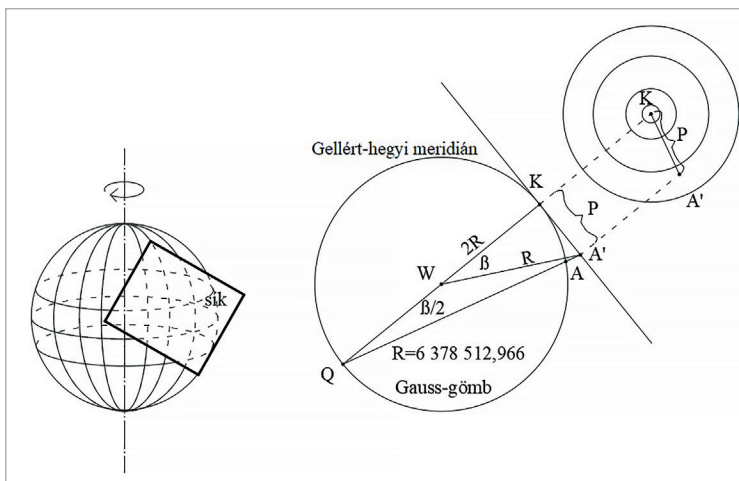
Torzulás szempontjából megkülönböztetünk általános torzulású (hosszak, szögek és területek egyaránt változnak), szögtartó (szögek változatlanok maradnak) és területtartó (a területek nem változnak) vetületeket. Ezek közül bárhová tartozzék is a vetület, minden vetületen van egy pont vagy egy vonal, ahol nincsen semmilyen torzulás, tehát mindegyik modulus az egységgel egyenlő. A torzulások ettől a helytől távolodva nőnek, és a vetület csak azon a területen belül használható, ahol a torzulások a megengedett értéket nem lépik túl. Nagyobb terület ábrázolásánál több vetületi rendszerre vagy sülyesztett (redukált) képfelületre van szükség.

A geodéziában arra törekszünk, hogy azokat a szögtartó vetületeket használjuk, amelyeknél a hossztorzulás nem haladhatja meg sehol sem az $1/_{10\,000}$ -et, vagyis kilométerenként a 10 cm-t.

9.3. A Magyarországon használt vetületi rendszerek

9.3.1. Sztereografikus vetületi rendszer

A sztereografikus vetület perspektív, szögtartó vetület, a vetítés középpontja a vetületi kezdőpontja ellenlábasa.



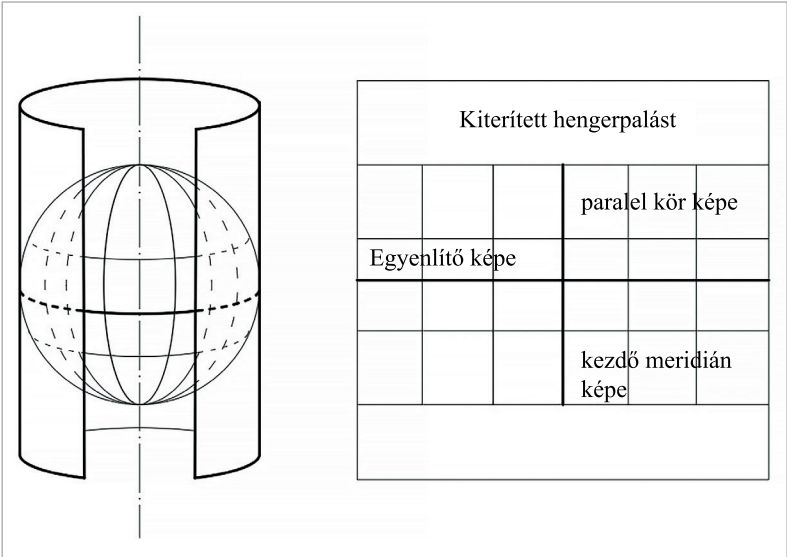
9.6. ábra: Sztereografikus vetület (a szerző szerkesztése)

Az országos sztereografikus vetület (második) képfelülete egy sík, amely a simuló gömböt (Gauss-gömb) a budapesti Gellért-hegy elnevezésű alappont gömbi megfelelőjében – a vetítés kezdőpontjában – érinti. A vetületen olyan síkkoordináta-rendszert alkalmaztak, amelynek X tengelye a kezdőponton átmenő meridián vetületi képével esik egybe, az Y tengely a meridiánra merőleges legnagyobb gömbi kör szintén egyenes képe. A koordináta-rendszer délnyugati tájolású (9.6. ábra). A kezdőpontban semmilyen torzulás nincs, a hossz- és területtorzulása a kezdőponttól távolodva négyzetesen nő, de koncentrikus körökön állandó. A hossztorzulás (hossznövekedés) a vetületi kezdőponttól 127 km-re éri el a kilométerenkénti 10 cm-es értéket. A vetületet az ország egész területén használták annak ellenére, hogy a Budapeستől legtávolabbi (285 km-re lévő) pontban

a hossztorzulás kilométerenként 50 cm. A fővárosnak és néhány vidéki városnak önálló (helyi) sztereografikus vetületi rendszere van.

9.3.2. Hengervetület

Hengervetületet úgy állítunk elő, hogy egy egyenes hengert a Földet helyettesítő gömbre húzunk úgy, hogy az Egyenlítő mentén érintik egymást, és a gömb és a henger tengelye egybeesik. A pontokat a gömbről átvetítjük a hengerpalástra, majd a palástot egy alkotója mentén felvágva síkba fektetjük (9.7. ábra).

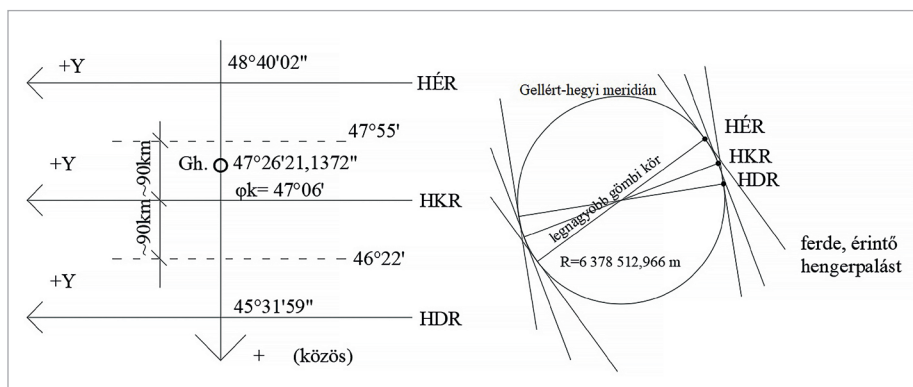


9.7. ábra: Hengervetület (a szerző szerkesztése)

A ferde tengelyű szögtartó hengervetületet 1908-ban vezették be. A Bessel-féle ellipszoidról a Gauss-gömbre, onnan pedig a hengerpalástra történt a vetítés. Ennél a vetületnél a vetítés geometriailag nem ábrázolható, a vetületi egyenleteket úgy alkották meg, hogy a vetület szögtartó legyen.

A történelmi Magyarország méreteihez választották. A megengedettnél nagyobb hossztorzulások elkerülése érdekében a vetület három rendszerét, az északi (HÉR), a középső (HKR) és a déli (HDR) rendszert vezették be (9.8. ábra).

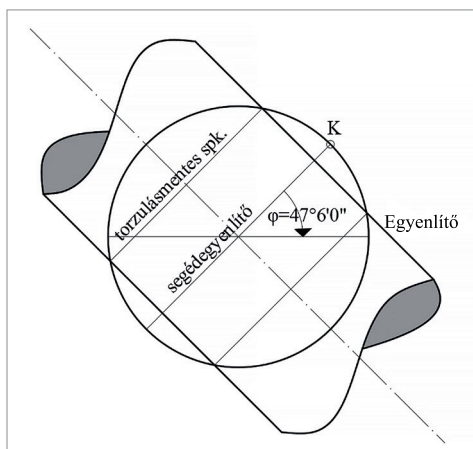
A vetület alapfelülete a simuló gömb, képfelülete hengerpalást. A henger a gömböt a Gellért-hegyi meridiánra merőleges azon legnagyobb gömbi kör mentén érinti, ahol a vetület kezdőpontja van. A három rendszernek három különböző kezdőpontja van. A három síkkoordináta-rendszernek közös az *X* tengelye, amely a Gellért-hegyi meridián vetületi képével esik egybe. A három *Y* tengely a három érintő kör egyenes képe. A hengervetületi koordináta-rendszerek délnyugati tájolásúak. A hossztorzulás az *Y* tengelytől 90 km távolságban éri el a kilométerenkénti 10 cm-es értéket, így mindhárom rendszer az *Y* tengelyre szimmetrikus 180 km szélességű sávban használható.



9.8. ábra: Magyarországi hengervetületek (a szerző szerkesztése)

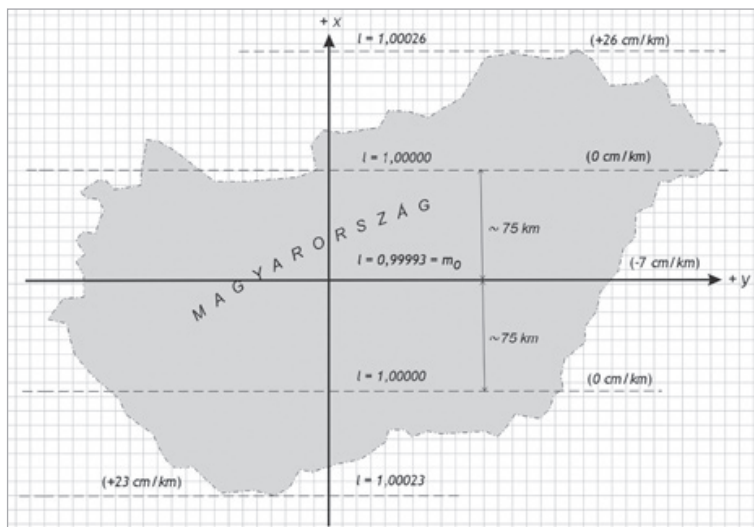
9.3.3. Egységes országos vetület

Hazánk jelenleg is használt vetületét 1975-ben vezették be egységes országos vetület (EOV) elnevezéssel. Alapfelülete az IUGG/1967 elnevezésű forgási ellipszoid, képfelülete – a kettős vetítést követve – egy újabb simuló gömb, az új Gauss-gömb ($R = 6379743,01$ m), majd egy ferde elhelyezésű, az alapfelületet metsző körhengerpalást (9.9. ábra).



9.9. ábra: Ferde tengelyű metsző hengerpalást (a szerző szerkesztése)

Az EOV szögterítési vetület. A metszés miatt a torzulások megoszlanak. A két metsző gömbi kör közötti területen (az Y tengelytől északra és délre egy-egy 75 km-es sávon) a hossztorzulás hosszrövidülést jelent, amelynek legnagyobb értéke, 7 cm/km az Y tengelyen mutatkozik. A metsző gömbi körön kívül ezzel ellentétben a hossztorzulás hossznövekedést jelent, amelynek legnagyobb értéke az ország legészakibb pontján 26 cm/km, a legdélibb ponton 23 cm/km (9.10. ábra). A területtorzulás a hossztorzulás négyzetével egyenlő.



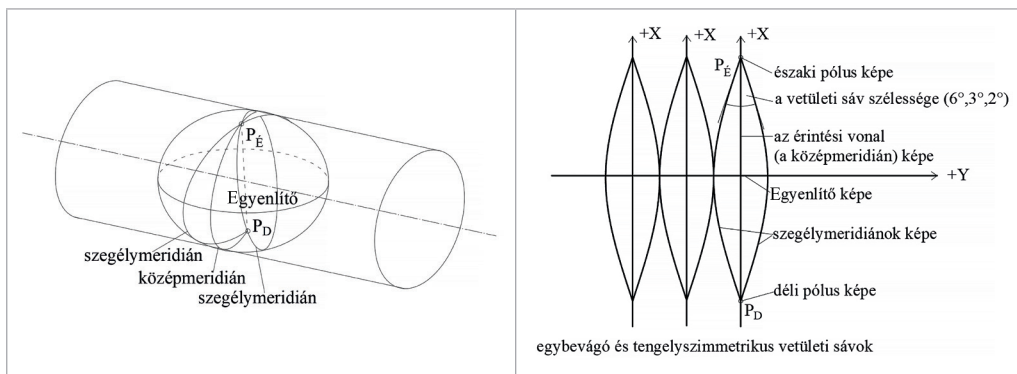
9.10. ábra: Az EOY hossztorzulásai [10]

A vetület kezdő meridiánja a Gellért-hegyi meridián, kezdőpontja a HKR kezdőpontjának helye az új alapfelületen. A síkkoordináta-rendszer X tengelye a kezdő meridián egyenes képe, Y tengelye a kezdőpontban a kezdő meridiánra merőleges legnagyobb gömbi kör szintén egyenes képe. A vetületi koordináta-rendszer északkeleti tájolású.

Annak érdekében, hogy az ország egész területére eső valamennyi pont koordinátája mind pozitív előjelű legyen, a koordinátatengelyeket a vetületi kezdőponthoz képest déli irányba 200 km-rel, nyugati irányba 650 km-rel eltolták. Így az új X koordináták 400 km-nél kisebbek, az új Y koordináták pedig 400 km-nél nagyobbak lettek, amivel a koordináták felcserélésének veszélye a lehető legkisebb lett.

9.3.4. Gauss–Krüger-vetület

A nemzetközi vetületek közül a Gauss–Krüger-vetület az egykori Varsói Szerződés tagállamainak közös katonai vetülete volt. Alapfelülete a Kraszovszkij-ellipszoid, képfelülete egy tranzverzális elhelyezésű, az alapfelületet egy meridiánellipszis mentén érintő (ellipszis keresztmetszetű) hengerpalást (9.11. ábra). A Gauss–Krüger-vetület szögtartó, nemzetközi használatra alkalmas, mert segítségével az egész Földet ábrázolni tudjuk.



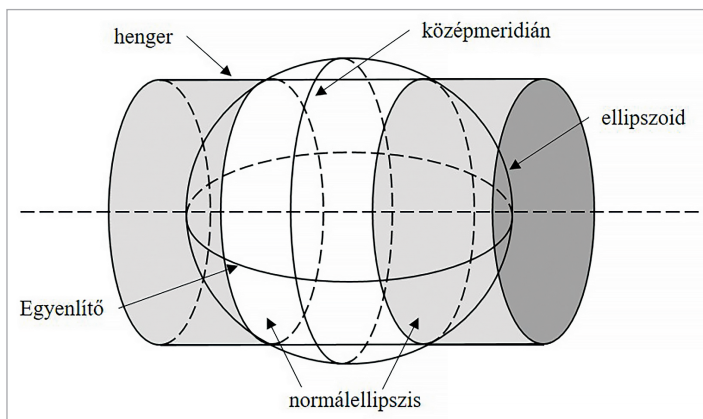
9.11. ábra: Gauss–Krüger-vetület (a szerző szerkesztése)

A vetületi sávok X koordinátatengelye az érintési meridián egyenes képe, Y tengelye pedig az Egyenlítő szintén egyenes képe. A koordináta-rendszerek az északi félgömbön északkeleti tájolásúak. A hossztorzulás az X tengelytől távolodva növekszik. Egy-egy vetületi sáv csak meghatározott úgynevezett szegélymeridiánok között használható, a szegélymeridiánok földrajzi hosszúságkülönbsége 6° . A sáv szélén a legnagyobb a hossznövekedés. Hazánk a közepes földrajzi szélességén fekszik (47°), itt a hossztorzulás 64 cm/km . A műszaki feladatok megoldásához használt úgynevezett nagy méretarányú térképek sáv szélessége 3° , illetve 2° , a hossznövekedés 16 cm/km , illetve 7 cm/km .

A Gauss–Krüger-vetület előnye, hogy egy-egy sáv az északi pólustól a déli pólusig terjed, így az egész Föld ábrázolásához 6° -os rendszerben 60 sáv elegendő. A koordináta-rendszerek Y tengelye közös, a vetületi sávok egybevágóak és mindkét tengelyre szimmetrikusak, ezért a vetületi számítások eredményét elegendő egyetlen negyed sávra vonatkozóan táblázatba foglalni. A NATO tagállamaiban napjainkban is használt vetület, az UTM (*Universal Transverse Mercator*) a Gauss–Krüger-vetület redukált változata.

9.3.5. UTM-vetület

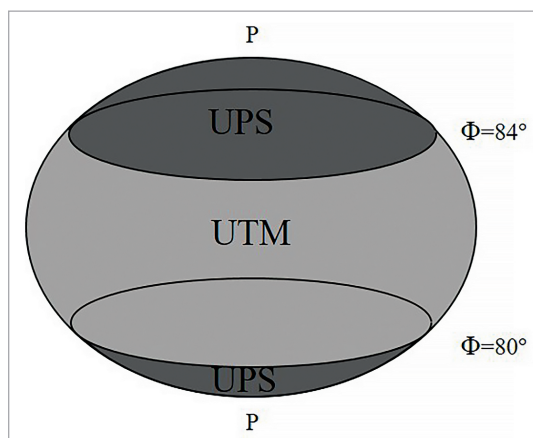
Az UTM (*Universal Transverse Mercator*) vetület az egész Föld felszínének leképezésére alkalmas, transzverzális (egyenlítői elhelyezésű) helyzetű, redukált, metsző szögtartó hengervetületi rendszer ellipszoid alapfelületen. A vetület valódi vetület, de nem perspektív. A „metsző” helyzet azt jelenti, hogy az adott sáv középmeridiánjára szimmetrikusan elhelyezkedő két normálellipszis mentén metszi az ellipszoidot (9.12. ábra). E két ellipszis hossztartó, a közöttük lévő területen a hosszak rövidülnek, a normálellipszisek és a határoló meridiánok között pedig növekednek.



9.12. ábra: Az ellipszoid egyenlítői elhelyezésű redukált hengervetülete (UTM-vetület) (a szerző szerkesztése)

1949-től az Egyesült Államok és a NATO tagországainak katonai szervezetei használják, 1951-től használják polgári térképezésre is.

Az UTM vetületi rendszert a földrajzi szélesség -80° -tól $+84^\circ$ -áig tartó területen alkalmazzák. A pólusok körüli területeket az ellipszoid két normális elhelyezésű redukált sztereografikus vetületében (UPS, *Universal Polar Stereographic*) ábrázolják (9.13. ábra).

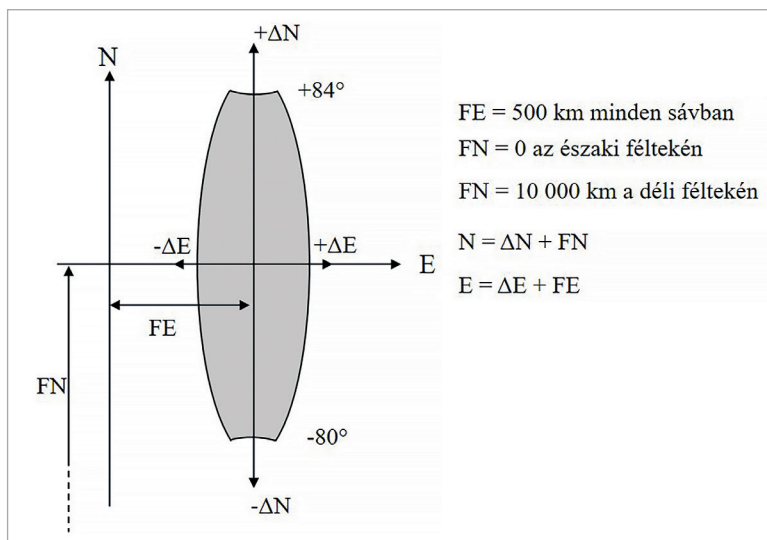


9.13. ábra: Az UTM és az UPS felhasználási területei (a szerző szerkesztése)

Az ellipszoid teljes felületének ábrázolására 60 db 6° -os sávra, úgynevezett zónára osztották azt. A zónákat 1-től 60-ig számozzák, a kiindulási vonala a keleti 180° -os meridián, a számozás ettől kelet felé halad. (A greenwichi meridián szegélymeridián.) Magyarország a 33. és 34. zónába esik. Minden 6° -os zónát az Egyenlítőtől északi és déli irányban 10-10 db 8° -os úgynevezett övre osztották a paralelkörök mentén. Így alakultak ki a $6^\circ \times 8^\circ$ -os úgynevezett zónamezők (foktrapézek). Az öveket az angol ábécé nagybetűivel jelölik C-től X-ig (az I és O betűk kivételével). A jelölés kezdete a déli szélesség 80° -a, és ettől az északi szélesség 84° -áig tart. Magyarország területe a T és az U övekbe esik.

A zónamezők azonosítása a zónát jelölő számmal és az övet jelölő betűvel történik. Ezek a foktrapézok nagy területet fednek le, ezért zónánként egy-egy derékszögű síkkoordináta-rendszer alakítottak ki. A koordináta-rendszer függőleges (X) tengelye a középmeridián, vízszintes (Y) tengelye az Egyenlítő.

A negatív előjelű síkkoordináták elkerülésére segéd-koordinátarendszert alkalmaznak. Észak–déli irányban FN (*False Northing*), kelet–nyugati irányban FE (*False Easting*) az eltolás jelölése (9.14. ábra).



9.14. ábra: UTM-vetület eltolt koordináta-rendszere (a szerző szerkesztése)

Az eddigiek alapján egy adott pont (N , E) bármelyik vetületi sávban lehetne, ezért a pontot tartalmazó $6^\circ \times 8^\circ$ kiterjedésű ellipszoid azonosítóját az „E” (keleti) koordináta elé írják (Magyarország területén 33T, 33U, 34T, 34U).

Az UTM-vetület a 6° -os sáv szélesség miatt csak topográfiai célokra alkalmas, hiszen a sáv középmeridiánján végig 40 cm-rel rövidülnek a hosszak kilométerenként. A nagy pontosságot igénylő térképezéseknél 3° -os zóna szélességet használnak úgy, hogy a 3° -os zónák középmeridiánjai egybeessenek a 6° -os zónák középmeridiánjaival.

10. Területmeghatározás

A területszámítás az egyik legfontosabb geodéziai számítási feladat. A területszámítás helyes végrehajtása az egyik legalapvetőbb feladat a mindennapi geodéziai tevékenységben.

A területmeghatározásban teljes mértékben érvényesül a nagyból kicsi felé haladás elve. Ennek megfelelően először kiszámítjuk a teljes idom területét, majd a részidomok területét. A részidomok területe összegének meg kell egyeznie a már kiszámított idom területével.

A kataszteri térkép területi adatai a múltban térképről levett méretek alapján születtek, ma digitalizált koordinátákból vagy terepi mérésből származó koordinátákból számítjuk a területeket.

10.1. A területmeghatározás módszerei

Ha a területmeghatározást közvetlenül a mérési adatokból vagy azok alapján számított koordinátákból végezzük, akkor numerikus területszámításról beszélünk.

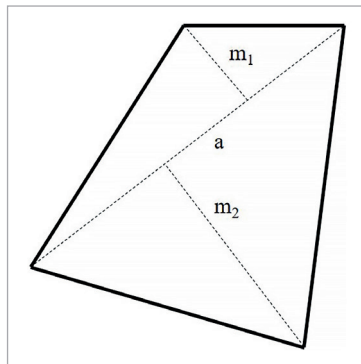
Ha a területmeghatározás a térképen vagy térképről levett adatokkal történik, akkor grafikus területszámításról beszélünk.

10.2. Területszámítás

10.2.1. Egyszerű idomok

Az egyszerű idomok (háromszög, téglalap, trapéz stb.) területszámítási képletei közismertek, így ezekről most nem lesz szó.

Egyszerű idomokra bontásról akkor beszélünk, ha valamely alakzatot a közismert egyszerű alakzatokra bontunk. Majd összegezzük ezen egyszerű alakzatokra kiszámított területeket (10.1. ábra).



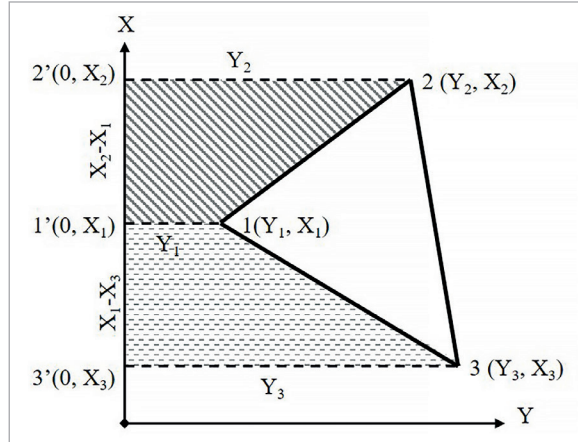
10.1. ábra: Egyszerű idomokra bontás (a szerző szerkesztése)

$$T = \frac{a \cdot m_1}{2} + \frac{a \cdot m_2}{2} = a \cdot \frac{m_1 + m_2}{2}$$

Területszámítás derékszögű koordinátákból:

A derékszögű koordinátákkal meghatározott pontokat összekötő egyenesekkel határolt idom területét kétféle módszerrel számíthatjuk.

Az egyik módszernél úgy járunk el, hogy az idom töréspontjait valamelyik koordinátatengelyre vetítjük, és az így kapott trapézok területeinek kiszámítása után állítjuk össze az idom területét (10.2. ábra).



10.2. ábra: Trapézra bontás (a szerző szerkesztése)

$T_1 = 1', 2', 2$ és 1 trapéz területe

$T_2 = 3', 1', 1$ és 3 trapéz területe

$T_3 = 3', 2', 2$ és 3 trapéz területe

$T = T_3 - (T_1 + T_2)$

A fenti képlet koordinátákkal kifejtve:

$$T = \frac{Y_2 + Y_3}{2} \cdot (X_2 - X_3) - \frac{Y_2 + Y_1}{2} \cdot (X_2 - X_1) - \frac{Y_1 + Y_3}{2} \cdot (X_1 - X_3)$$

Rendezve az egyenletet:

$$\begin{aligned} -2T &= (Y_2 + Y_1) \cdot (X_2 - X_1) + (Y_1 + Y_3) \cdot (X_1 - X_3) - (Y_2 + Y_3) \cdot (X_2 - X_3) \\ -2T &= Y_2 X_2 - Y_2 X_1 + Y_1 X_2 - Y_1 X_1 + Y_1 X_1 - Y_1 X_3 + Y_3 X_1 - Y_3 X_3 - Y_2 X_2 \\ &\quad + Y_2 X_3 - Y_3 X_2 + Y_3 X_3 \\ -2T &= X_1(Y_3 - Y_2) + X_2(Y_1 - Y_3) + X_3(Y_2 - Y_1) = \sum X_i(Y_{i-1} - Y_{i+1}) \end{aligned}$$

vagy

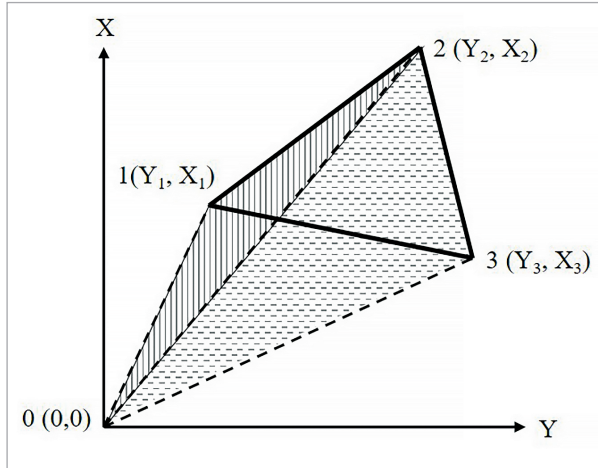
$$-2T = Y_1(X_2 - X_3) + Y_2(X_3 - X_1) + Y_3(X_1 - X_2) = \sum Y_i(X_{i+1} - X_{i-1})$$

azaz

$$T = \frac{1}{2} \left| \sum X_i (Y_{i-1} - Y_{i+1}) \right|$$

$$T = \frac{1}{2} \left| \sum Y_i (X_{i-1} - X_{i+1}) \right|$$

A másik módszer szerint úgy járunk el, hogy az idom töréspontjait az origóval kötjük össze, s az így kapott háromszögek területeit számítjuk ki, és abból képezzük az idom területét (10.3. ábra).



10.3. ábra: Háromszögre bontás (a szerző szerkesztése)

$T_1 = 0, 1$, és 2 háromszög területe
 $T_2 = 0, 2$ és 3 háromszög területe
 $T_3 = 0, 1$ és 3 háromszög területe
 $T = T_1 + T_2 - T_3$

Az egyes háromszögek területét a koordináta geometriából ismert $\begin{bmatrix} Y_1 & X_1 & 1 \\ Y_2 & X_2 & 1 \\ Y_3 & X_3 & 1 \end{bmatrix}$ összefüggéssel számítjuk, azzal az egyszerűsítéssel, hogy a harmadik pont legyen az origó, azaz $Y_3 = 0$ és $X_3 = 0$, ezáltal a számítás $\begin{bmatrix} Y_1 & X_1 & 1 \\ Y_2 & X_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixra egyszerűsödik, így a $2T = Y_1X_2 - Y_2X_1$ alakú, origó középpontú elemi háromszög képletéhez jutunk.

Ezt az ábrán rajzolt háromszögre alkalmazzuk:

$$2T = (Y_1X_2 - Y_2X_1) + (Y_2X_3 - Y_3X_2) - (Y_1X_3 - Y_3X_1)$$

$$2T = (Y_1X_2 - Y_2X_1) + (Y_2X_3 - Y_3X_2) + (Y_3X_1 - Y_1X_3)$$

majd általánosítva az alábbi összefüggéseket írhatjuk fel:

$$2T = \sum_{i=1}^n (Y_i X_{i+1} - Y_{i+1} X_i)$$
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (Y_i X_{i+1} - Y_{i+1} X_i)$$

Megjegyezzük, hogy a képletekben szereplő $i-1$, illetve $i+1$ az idom i -edik pontját – a körbejárási irány értelmében vett – megelőző, illetve követő pontját jelöli, és nem számsorrendet.

Ezek a képletek számítógépre könnyen programozhatók.

A grafikus területmeghatározást ma már ritkán használjuk, a gyakorlatban nincs jelentősége.

Ajánlott irodalom

- Ádám József, Rózsa Szabolcs. GNSS elmélete és alkalmazása [Internet]. Budapest: Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építőmérnöki Kar Földmérő- és Térinformatikai mérnök mesterszak; 2012. 10, Egységes európai és magyarországi geodéziai alapok. p. 127–133. Elérhető: <https://edu.epito.bme.hu/local/coursepublicity/mod/resource/view.php?id=57051>
- Csepregi Szabolcs. Geodéziai alapismeretek Székesfehérvár: EFE-FFFK; 1977. 176 p.
- Csepregi Szabolcs. Geodéziai alapismeretek II. Székesfehérvár: EFE-FFFK; 1981. 375 p.
- Csepregi Szabolcs. Geodéziai alapismeretek III. Székesfehérvár: EFE-FFFK; 1983. 238 p.
- Krauter András: Óravázlatok a Geodézia I. tantárgy előadásaihoz [Internet]. Elérhető: <https://edu.epito.bme.hu/local/coursepublicity/mod/resource/view.php?id=7508>
- Sárdy Andor. Geodéziai alapismeretek I. Budapest: Tankönyvkiadó; 1988. 596 p.
- Sárdy Andor. Geodéziai alapismeretek II. Budapest: Tankönyvkiadó; 1988. 618 p.
- Takács Bence, Siki Zoltán, Égető Csaba, Bényi László. Mérnökgeodéziában alkalmazott alapponthálózatok [Internet]. Budapest: Magyar Mérnöki Kamara; 2018. 82 p. Elérhető: http://mmk-ggt.hu/fap/fap_halozatok_181107.pdf
- UTM (Universal Transversal Mercator-Projection) Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Kar Térképtudományi és Geoinformatikai Intézet [Internet]. Elérhető: <http://lazarus.elte.hu/hun/tanterv/terkeprendszerek/> 5 p
- Tarsoly Péter. Geodézia II. Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai Kar Geodézia Tanszék; 2013. 169 p.
- Varga Antal. Geodézia I. Budapest: Tankönyvkiadó; 1990. 182 p.
- Varga Antal. Geodézia II. Budapest: Tankönyvkiadó; 1993 184 p.
- Varga József. Vetülettan [Internet]. Budapest: BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék; 2004. Elérhető: <http://152.66.5.8/tantargyak/vetulettan/vetulet.pdf>

VÁKÁT OLDAL

Ábrák forrása

1. Gyenes Róbert: Geodézia 3. Geodéziai alapponthálózatok, pontjelölések. Nyugat-magyarországi Egyetem; 2010. Elérhető: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027_GED3/ch01s04.html
2. <https://mapio.net/pic/p-34391105/>
3. www.bornes-feno.com/borne-polyroc-standard-neutre.html
4. http://webshop.argongeo.hu/termek/merofolia_40
5. www.hedue.hu/fa-szintezoallvany-170-cm-1064
6. Csepregi Szabolcs, Gyenes Róbert, Tarsoly Péter: Geodézia I. Székesfehérvár; 2013. 206 p.
7. <http://geoset.hu/termek/LT01-Digitalis-Teodolit>
8. <https://somiszerszam.hu/profi-nyitott-acer-meroszalag-50m-1-34-478>
9. Tarsoly Péter: Geodézia 9. Magasságok meghatározása. Nyugat-magyarországi Egyetem; 2010. Elérhető: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027_GED9/index.html
10. Varga József: Vetülettan. Elérhető: www.agt.bme.hu/tantargyak/vetulettan/vetulet.pdf

VÁKÁT OLDAL

A Geodéziai alapismeretek I. tankönyv célja, hogy a geodéziában használatos fogalmakkal, alapvető geodéziai mérésekkel, mérési eljárásokkal és a mérésekhez használt eszközökkel megismertesse az olvasót.

A tankönyv tárgyalja az alapfogalmakat, a méréseket terhelő hibákat, a vízszintes és magassági meghatározásokhoz szükséges mérési eszközöket, technológiákat és eljárásokat. Bevezet a geodéziai számítások alapjaiba, a részletpont-meghatározási módszerekbe, bemutatja a Magyarországon használatos vetületi rendszereket, és megismerteti a területszámítás alapjaival.