PRO PATRIA AD MORTEM

Mechanika II.
Szilárdságtan

TÓTH BENCE

Dialóg Campus

Tóth Bence

Mechanika II.

PRO PATRIA AD MORTEM

Tóth Bence

MECHANIKA II.

Szilárdságtan

Dialóg Campus ❖ Budapest, 2019

Szakmai lektor
Dr. Nagy Imre

A forrásmegjelölés nélküli ábrák a szerző saját szerkesztései.

Tartalom

Előszó

Több mint tíz év telt el azóta, hogy a Nemzeti Közszolgálati Egyetemen, pontosabban egyik elődintézményében, a Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetemen egyetemi jegyzet készült a műszaki mechanika témakörében, azon belül is szilárdságtanból.

Ez idő alatt nemcsak az ebben a témakörben tárgyalt jelenségeknek, műszaki megoldásoknak jelentek meg újabb alkalmazási területei, hanem az egyetemi képzésben is több változás történt. Mivel új szakokon új tárgyak oktatása folyik, ezért a változó tantárgyi követelményekhez az oktatási anyagoknak is igazodniuk kell. Ennek a célnak kíván jelen jegyzet megfelelni, ugyanis célirányosan az NKE Hadtudományi és Honvédtisztképző Karon, a katonai logisztika BSc szakon oktatott Mechanika II. kurzus tananyagának lefedésére készült. A megközelítés elméleti jellegű, az itt levezetett összefüggések alkalmazását külön példatár segíti.

A jegyzet feltételezi a *Mechanika I.* jegyzet anyagának, illetve a differenciál- és integrálszámításnak az alapvető ismeretét, de a mátrixalgebra szükséges összefüggéseit tárgyalja. A leglényegesebb angol szakkifejezések nemcsak első szövegközi előfordulásukkor jelennek meg, hanem összegyűjtve is megtalálhatók a jegyzet végén.

Budapest, 2019. 06. 03.

Dr. Tóth Bence

Vákát oldal

1. Fizikai mennyiségek

A fizikai mennyiségeknek három alapvető típusa létezik: skalár-, vektor- és tenzormennyiségek. Mivel ez utóbbiakra a szilárdságtan tárgyalásakor szükség lesz, ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk alapvető tulajdonságaikat.

1.1. Mátrixok és tenzormennyiségek

A skaláris mennyiségek azok a fizikai mennyiségek, amelyeknek csak nagyságuk van, értékük nem függ a koordináta-rendszer megválasztásától.

A vektoriális mennyiségek olyan fizikai mennyiségek, amelyeknek nemcsak nagysága, hanem jellemző iránya is van. Éppen ezért az őket jellemző vektor tengelyétől, az úgynevezett hatásvonaltól eltérő tengelyek irányában más (kisebb) hatást fejtenek ki.

A tenzoriális mennyiségek abban különböznek a vektoriális mennyiségektől, hogy egy adott térbeli pontban attól is függ a nagyságuk, hogy milyen tengely irányában mérjük az adott fizikai mennyiség nagyságát. Ezt a fajta viselkedést, hogy melyik térbeli tengely irányában mekkora az adott mennyiség értéke, egy úgynevezett tenzorral írhatjuk le, amelyet egy adott koordináta-rendszerben egy mátrixszal reprezentálhatunk. A mátrix $n \times m$ darab mennyiség téglalap alakú elrendezése. Míg a skalárokat döntött, a vektorokat félkövér kisbetűkkel szokás jelölni, addig a tenzorokat, illetve az azokat egy adott koordináta-rendszerben reprezentáló mátrixokat félkövér nagybetűkkel. A mátrixok egyes elemeire azzal a két számmal hivatkozunk, hogy hányadik sorban és azon belül hányadik oszlopban találhatóak, azaz az **A** mátrix 3. sorának 4. elemére A_{34}-ként hivatkozunk.

Azokat a mátrixokat, amelyek ugyanannyi sorból és oszlopból állnak, négyzetes mátrixoknak nevezzük. Az ilyen mátrixok azon elemeit, amelyek két koordinátája azonos, diagonális elemeknek nevezzük, a mátrix ezen átlóját pedig, amelyben ezek az elemek elhelyezkednek, főátlónak. A többi elemet offdiagonális elemnek nevezzük. Azt a négyzetes mátrixot, amelynek

a főátlójában minden elem 1, az offdiagonális elemei pedig mind nullák, egységmátrixnak nevezzük, és **E**-vel (vagy az angol szakirodalomban **I**-vel, mint *identity*) jelöljük.

Tenzoriális mennyiség például a tehetetlenségi nyomaték: egy rudat könnyebb a hossztengelye mentén, mint arra merőlegesen megpörgetni. Az eltérő tengely eltérő viselkedést eredményez.

Ugyanúgy, ahogy egy háromdimenziós vektoriális mennyiséget jellemző számhármas is függ a választott koordináta-rendszertől, ugyanúgy más koordináta-rendszerben mások lesznek egy tenzoriális mennyiséget jellemző 3×3-as mátrix elemei.

1.2. Diadikus szorzat

Két vektor skaláris szorzata egy skalár, két vektor vektoriális szorzata egy vektor. Két vektornak létezik egy harmadikféle szorzata is, amelyet diadikus szorzatnak nevezünk, és az eredménye egy mátrix. Ekkor egy n dimenziós oszlopvektort (**v**) szorzunk meg egy m dimenziós sorvektorral (**w***), aminek eredménye egy n sorból és m oszlopból álló, azaz egy $n\times m$-es mátrix (**U**) lesz. Magát a diadikus szorzás műveletét a $\circ$ szimbólummal jelöljük, megkülönböztetendő a skalárszorzattól:

(1) $$\mathbf{U} = \mathbf{v} \circ \mathbf{w}$$

Ebben az esetben nem feltétlenül szükséges a **w** vektort **w***-ként jelölni, hiszen a diadikus szorzás műveleti jele miatt egyértelmű, melyik az oszlop- és melyik a sorvektor. Az egyes U_{ij} elemeket, amelyekre hivatkozhatunk az **U** mátrix (i, j) elemeiként is, tehát az alábbi módon képezzük:

(2) $$U_{ij} = v_i w_j$$

azaz a megfelelő vektorok i-edik és j-edik elemeit szorozzuk össze és rendezzük mátrixba, mintha egydimenziós vektorokat skalárszoroznánk össze:

(3) $$\mathbf{v} \circ \mathbf{w}^* = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & \cdots & v_1 w_m \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & \cdots & v_2 w_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n w_1 & v_n w_2 & \cdots & v_n w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1m} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n1} & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

Az így kapott mátrixot szokás még diádnak is nevezni. Minden diád mátrix, de nem minden mátrix diád, azaz nem minden mátrix állítható elő két vektor diadikus szorzataként.

1.3. Mátrix szorzása vektorral

Egy mátrixot szorozhatunk vektorral is, mátrixszal is. Ahogy két vektor skaláris szorzata esetén, itt is fontos szerephez jutnak a dimenziók, de ezenfelül az sem mindegy, hogy egy mátrixot egy vektorral jobbról vagy balról szorzunk össze. Két n dimenziós vektor, **a** és **b** esetén mindegy volt, melyiket tekintjük oszlop- és melyiket sorvektornak, hiszen $\mathbf{a}^* \mathbf{b} = \mathbf{b}^* \mathbf{a}$. Egy mátrixot balról megszorozni egy vektorral azonban csak akkor lehet, ha a vektor dimenziója megegyezik a mátrix sorainak számával. Hasonlóan, egy mátrixot jobbról megszorozni egy vektorral csak akkor lehet, ha a vektor dimenziója megegyezik a mátrix oszlopainak számával.

Egy $n \times m$-es **U** mátrixot ugyanis úgy szorzunk meg balról egy n dimenziós $\mathbf{v}^*$ sorvektorral, hogy a mátrixot úgy tekintjük, mintha m darab n dimenziós oszlopvektorból állna, és ezeket az oszlopvektorokat egyesével összeszorozzuk skalárisan a $\mathbf{v}^*$ sorvektorral, majd a megfelelő elemeket vektori alakba rendezzük. Az eredmény így egy m dimenziós $\mathbf{p}^*$ sorvektor lesz:

(4)
$$\mathbf{v}^* \mathbf{U} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1m} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix} = \mathbf{p}^*$$

ahol $p_1 = v_1 U_{11} + v_2 U_{21} + \ldots + v_n U_{n1}$, azaz általánosan kifejezve:

(5)
$$p_j = v_1 U_{1j} + v_2 U_{2j} + \ldots + v_n U_{nj} = \sum_{i=1}^{n} v_i U_{ij}$$

Egy $n \times m$-es **U** mátrixot hasonlóan szorzunk meg jobbról egy m dimenziós **w** oszlopvektorral: a mátrixot úgy tekintjük, mintha n darab m dimenziós sorvektorból állna, és ezeket a sorvektorokat egyesével összeszorozzuk skalárisan a **w** oszlopvektorral, majd a megfelelő elemeket vektori alakba rendezzük. Az eredmény így egy n dimenziós **q** oszlopvektor lesz:

(6)
$$\mathbf{U}\,\mathbf{w} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1m} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

ahol $q_1 = U_{11}\, w_1 + U_{12}\, w_2 + \ldots + U_{1m}\, w_m$, azaz általánosan kifejezve:

(7)
$$q_i = U_{i1} w_1 + U_{i2} w_2 + \ldots + U_{im} w_m = \sum_{j=1}^{m} U_{ij} w_j$$

1.4. Mátrix szorzása mátrixszal

Két mátrix (például **U** és **V**) egymással való szorzása az előbbiekben bemutatottakkal analóg módon történik: Az **UV** szorzat esetében az **U** mátrixot sor-, a **V** mátrixot oszlopvektorok összességének tekintjük, és egyesével összeskalárszorozzuk őket. Ez természetesen azt is jelenti, hogy ez a mátrixszorzás csak akkor végezhető el, ha **U** egy $n \times m$-es, **V** pedig egy $m \times r$-es mátrix:

(8)
$$\mathbf{U}\,\mathbf{V} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1\boldsymbol{m}} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n1} & U_{n2} & \cdots & U_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1r} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{m1} & V_{m2} & \cdots & V_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1r} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nr} \end{bmatrix} = \mathbf{W}$$

A **W** szorzatmátrix egy általános eleme tehát a következő módon fejezhető ki:

(9)
$$W_{ij} = \left[\mathbf{UV}\right]_{ij} = U_{i1}V_{1j} + U_{i2}\mathrm{V}_{2j} + \ldots + U_{im}V_{mj} = \sum_{k=1}^{m} U_{ik}V_{kj}$$

Az így eredményül kapott **W** mátrix egy $n \times r$-es mátrix lett. Ez azt is jelenti, hogy – jelen példánk esetében – ha $n \neq r$, akkor a **VU** mátrixszorzat nem is létezik, mivel a szorzás elvégzésekor eltérő dimenziójú vektorokat kellene összeskalárszorozni.

De ha $n = r$, akkor is általában az igaz, hogy $\mathbf{UV} \neq \mathbf{VU}$, az egyenlőség csak szimmetrikus mátrixok esetén áll fenn, hiszen

(10)
$$\left[\mathbf{V}\,\mathbf{U}\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} V_{ik}U_{kj}$$

és így a (9) és (10) egyenletek összehasonlításából

(11)
$$\mathbf{U}\,\mathbf{V} = \mathbf{V}\,\mathbf{U} \Leftrightarrow V_{ik} = V_{ki} \quad \text{és} \quad U_{jk} = U_{kj} \qquad \forall\, i, j$$

Könnyen belátható, hogy az egységmátrixra igaz, hogy

(12)
$$\mathbf{A}\,\mathbf{E} = \mathbf{E}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

ha az **A** olyan mátrix, hogy az **AE** és az **EA** szorzatok léteznek.

1.5. Determináns

Egy vektorból egy skalárt képezni az abszolút értékének meghatározásával lehet, ami gyakorlatilag az önmagával vett skalárszorzat négyzetgyökének a kiszámítása. Egy mátrixhoz is hozzá tudunk rendelni egy jellemző skalárt, amit a mátrix determinánsának nevezünk. Jelölése: det **A** vagy $|\mathbf{A}|$.

Kiszámításának módja 2×2-es mátrixokra:

$$\det \mathbf{B} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{13}$$

Kiszámításának módja 3×3-as mátrixokra:

$$\det \mathbf{C} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh + bfg - bdi + cdh - ceg \tag{14}$$

A determináns meghatározható az úgynevezett előjeles aldeterminánsok kifejtésével is. Ehhez kiválasztjuk a mátrix egy sorát, majd a sor első eleméhez tartozó oszlopot és sort töröljük a mátrixból, és a megmaradó elemek determinánsát képezzük az úgynevezett sakktáblaszabály szerinti előjellel. Ez azt jelenti, hogy a mátrix (1,1) eleméhez tartozó aldeterminánst pozitív előjellel vesszük figyelembe, az (1,2) és a (2,1) elemekhez tartozókat negatív előjellel, és így tovább:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & & \\ + & & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \tag{15}$$

Ezt elvégezzük a kiválasztott sor minden elemére. Ennek megfelelően a fenti **C** mátrix determinánsa az aldeterminánsok szerinti kifejtéssel a következő lesz:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{C} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} = \\ &= g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

amelyben ha kifejtjük a 2×2-es determinánsokat, a (14) eredményére jutunk. Ez a módszer jól használható nagyobb mátrixok determinánsának meghatározására is: minden lépésben eggyel csökkentjük a kifejtendő determinánsok dimenzióját.

2. Húzás és nyomás

Egy egyensúlyi erőrendszer adott keresztmetszetre csak úgy gyakorolhat egytengelyű tiszta húzást (nyomást), ha az egyensúly két feltétele ($\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$ és $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$) mellett azt is megköveteljük, hogy egyáltalán semmilyen forgatónyomaték ne hasson a szerkezetre, azaz az erősebb $\mathbf{M}_i = \mathbf{0}$ feltétel teljesülése is szükséges. Erők természetesen nemcsak hathatnak, hanem hatniuk is kell a rendszerre. Mindebből azonban következik, hogy az erők hatásvonalának egy pontban kell metszeniük egymást.

Az eddig kiszabott feltételek azonban megvalósíthatóak lennének egy egyensúlyi erőrendszerrel is, amelynek egyes komponenseit a test két végére csoportosítanánk: egy adott x tengelyre vett pozitív merőleges vetületű erőket az egyik, a negatív merőleges vetületűeket a másik végére, és vennénk ezek eredőjét. A $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ feltételből és a közös metszéspontból ezek után már következne, hogy az egyes erővektoroknak az x tengelyre merőleges tengely irányú vetületeinek az eredő forgatónyomatéka nulla lesz, azonban ezzel nem (szükségszerűen) egytengelyű húzás valósulna meg (nyírás is felléphet). Ezért a tárgyaláshoz a test két végén ható két, azonos nagyságú, közös hatásvonalú, de ellentétes irányítottságú erőt tételezünk fel, amelyek hatásvonala merőleges a vizsgált keresztmetszetre.

Mivel az alapvető szilárdságtani alapfogalmakat a húzás és a nyomás igénybevételének segítségével lehet legkönnyebben szemléltetni, ezért ezeket ennek a fejezetnek az elején tárgyaljuk.

2.1. A deformáció

Egy állandó keresztmetszetű (más szóval prizmatikus) egyenes rúd *tengelyén* a rúd egyes keresztmetszeteinek súlypontjait összekötő egyenest értjük. Legyen egy prizmatikus test hossza ℓ_0! Hasson két szemközti lapjának súlypontjában, azaz tengelyének két végpontjában két, azonos nagyságú, de egymással ellentétes irányítottságú **F** erő. Tegyük fel, hogy ennek hatására

úgy deformálódik, hogy a hossza ℓ_1 lesz. A hosszváltozás mértékét megnyúlásnak nevezzük:

$$\Delta\ell = \ell_1 - \ell_0 \tag{17}$$

amelynek értéke húzásnál pozitív, nyomásnál negatív. Segítségével definiálhatunk egy dimenziómentes arányszámot, a fajlagos nyúlást (*engineering normal strain* vagy *Cauchy strain*):

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \tag{18}$$

Mivel a deformáció következtében anyag nem tűnt, nem tűnhetett el a testből, a térfogatának (jó közelítéssel) állandónak kellett maradnia. Ehhez szükséges, hogy a test keresztmetszete a kezdeti d_0-ról megváltozzon: húzás esetén lecsökkenjen, nyomás esetén megnövekedjen d_1-re. Ennek a változásnak az eredeti keresztmetszethez képesti arányát szintén egy dimenziómentes számmal jellemezhetjük, és (húzás esetén) merőleges vagy keresztmetszeti kontrakciónak nevezzük:

$$\varepsilon_{\mathrm{k}} = \frac{d_1 - d_0}{d_0} \tag{19}$$

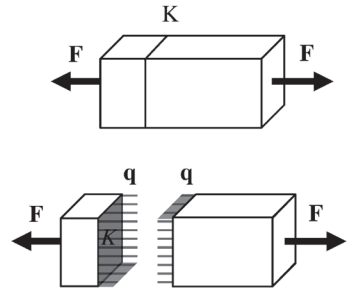
A test ezen két, egymásra merőleges irányú, húzás hatására történő méretváltozásának arányát jellemző dimenziótlan számot kis görög nűvel jelöljük, és Poisson-számnak[1] nevezzük:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{\mathrm{k}}}{\varepsilon} \tag{20}$$

2.2. A normális feszültség

Húzzunk meg egy prizmatikus testet tengelyének két végén két azonos nagyságú, egymással ellentétes irányítottságú **F** erővel (1. ábra).

[1] Siméon Denis Poisson (1781–1840) francia matematikus, fizikus, mérnök.



1. ábra

Legyen a test egy, az **F** erőre merőleges K keresztmetszetének a felülete *K*. Ekkor fellép egy belső erőrendszer is, amely a deformációval szemben biztosítja a test valamennyi pontjának az egyensúlyát. Vágjuk félbe a testet a K keresztmetszetben, és helyettesítsük az egyik félben fellépő belső erőrendszert egy, a *K* felületen megoszló **q** erőrendszerrel. Mivel ennek az erőrendszernek egyensúlyt kell tartania a test végén ható **F** erővel, ezért

$$F = q\,K \tag{21}$$

Ezt a *K* felületen megoszló, a keresztmetszetre merőleges erőrendszert normális feszültségnek *(normal stress)* (jele: **σ**, mértékegysége N/m^2) nevezzük.

A fenti gondolatmenetet a test tetszőleges *A* felületű A keresztmetszetére is elvégezhetjük, amiből következik, hogy állandó keresztmetszetű testben fellépő feszültség állandó a test tengelye mentén.

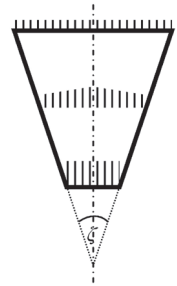
Adott **F** húzóerő esetén tetszőleges(en változó) keresztmetszetű test tetszőleges (de **F**-re merőleges) keresztmetszetére is azonos módon számítható a feszültség nagysága a keresztmetszet *A* felületének ismeretében:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{22}$$

Ezt az egyenletet nevezzük a húzás (nyomás) alapegyenletének. Érdekessége, hogy a számláló csak a deformációt létrehozó koncentrált erő nagyságától függ, azaz hiába okozná egy rúd két végén két megoszló erőrendszer a deformációt, csak ezek helyettesítő koncentrált erejének nagysága szükséges a feszültség kiszámításához. A nevezőben pedig csak a keresztmetszet nagysága szerepel, azaz a létrejövő feszültség annak alakjától független, és (jó közelítéssel) egyenletesen oszlik meg rajta.

Lévén vektormennyiség, amikor egy adott testre hat, szükséges egy előjel-konvenció: a húzófeszültséget pozitívként, a nyomófeszültséget negatívként vesszük figyelembe.

Ha a rúd keresztmetszete nem állandó, hanem például egyenletesen növekszik a 2. ábrán látható módon, akkor a belső keresztmetszetekben a súlypontban fellépő feszültség nagyobb, mint a széleken, és ez az eltérés annál nagyobb, minél nagyobb a ζ szög. Hasonlóan, ha például egy repedés miatt egy keresztmetszet hirtelen változik, a repedés mentén a feszültség akár többszöröse is lehet a többi, nem sérült keresztmetszeten fellépőnek. A 12. fejezetben tárgyalandó fáradásos törések nagy része éppen ilyen „feszültséggyűjtő" helyeken következik be.

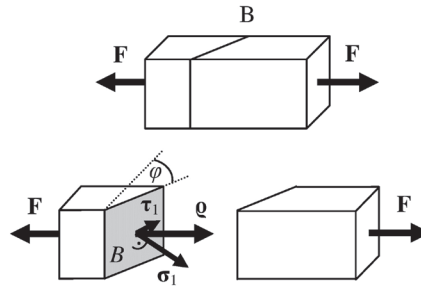


2. ábra

Húzás hatására a húzás tengelyében negatív feszültségek lépnek fel (amelyek a húzás pozitív feszültségét kompenzálják), de ezzel párhuzamosan erre a tengelyre merőlegesen pozitív feszültségek is fellépnek, amelyek a keresztmetszeti kontrakció által okozott negatív feszültségek ellen dolgoznak.

2.3. A csúsztatófeszültség

Húzzunk meg egy prizmatikus testet két szemközti lapjának súlypontjaiban két azonos nagyságú, egymással ellentétes irányítottságú **F** erővel (3. ábra).



3. ábra

Legyen a test egy, az **F** erőre merőleges A keresztmetszetének nagysága *A*, az **F** erővel φ szöget bezáró B keresztmetszetének a felülete *B*. Ekkor

(23) $$B = \frac{A}{\cos(\varphi)}$$

A testet a B keresztmetszetben kettévágva egy, a *B* felületen megoszló erőrendszernek kell egyensúlyt tartania a test végén fellépő **F** erővel. Ezt a felületen megoszló erőrendszert, azaz a B keresztmetszeten fellépő teljes feszültséget jelöljük **ρ**-val. Ekkor a (21) alapján igaz, hogy

(24) $$F = \sigma A = \rho B$$

Ebből ρ-t kifejezve és (23)-at behelyettesítve:

(25) $$\rho = \frac{F}{B} = \frac{F}{\frac{A}{\cos(\varphi)}} = \frac{F}{A}\cos(\varphi) = \sigma\cos(\varphi)$$

A 3. ábra alapján bontsuk fel a **ρ** vektort a B keresztmetszettel párhuzamos ($\boldsymbol{\tau}_1$) és arra merőleges ($\boldsymbol{\sigma}_1$) vektorokra. Ekkor, mivel a **ρ** és a $\boldsymbol{\sigma}_1$ vektorok által közrezárt szög φ, a két merőleges vetület kifejezhető:

(26) $$\tau_1 = \rho\sin(\varphi)$$

(27) $$\sigma_1 = \rho\cos(\varphi)$$

A (25) mindkét oldalát beszorozva cosφ-vel, majd behelyettesítve (27)-et, kapjuk:

$$\sigma_1 = \frac{F}{A}\cos^2(\varphi) = \sigma\cos^2(\varphi) \tag{28}$$

Ezzel kifejeztük a test **F** húzóerővel tetszőleges φ szöget bezáró keresztmetszetén ható normális feszültséget.

A (25) mindkét oldalát sinφ-vel beszorozva, majd behelyettesítve (26)-ot, kapjuk:

$$\tau_1 = \frac{F}{A}\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{F}{2A}2\sin(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{\sigma}{2}\sin(2\varphi) \tag{29}$$

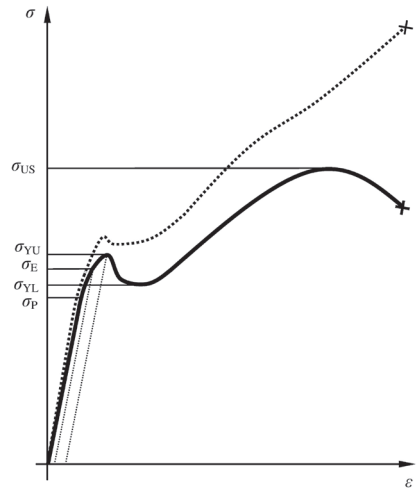
Ezt a keresztmetszet síkjába eső feszültséget csúsztatófeszültségnek *(shear stress)* nevezzük.

A 3. ábrán látható szerkezet esetében megfelelő koordináta-rendszerválasztással a $\boldsymbol{\tau}_1$ vektornak csak egyetlen koordinátája nem nulla. Általános esetben azonban a csúsztatófeszültségnek két komponense van a normál feszültségre merőleges síkban. Ha a $\boldsymbol{\sigma}$ vektor a koordináta-rendszer z tengelyére illeszkedik, akkor a két, az x és az y tengely irányú $\boldsymbol{\tau}$ vektorkomponenseket τ_{zx} és τ_{zy} alakban jelöljük, azaz az első index a tengely, amelyre merőleges síkban fekszenek, a második a síkon belüli irányuk.

A továbbiakban, amikor csak egyszerűen „keresztmetszet”-ről van szó, akkor a rúd tengelyére merőleges keresztmetszetet fogunk alatta érteni.

2.5. A szakítódiagram és a Hooke-törvény

A 4. ábrán látható egy úgynevezett szakítódiagram vázlata. Ezt úgy vesszük fel egy konkrét anyagra, hogy egy két oldalán befogott, az adott anyagból készült mintát egyre nagyobb erővel húzunk, miközben mérjük a deformációt és a keresztmetszet változását. Utóbbiból a terhelő erő ismeretében számítható a feszültség. Az így kapott σ-t a mért ε függvényében ábrázolva kapjuk a szakítódiagramot.



4. ábra

A görbén több jellegzetes pontot figyelhetünk meg, amelyeket a hozzájuk tartozó feszültségértékkel szoktunk jellemezni.

Az első a σ_P-vel *(proportionality)* jelölt arányossági határ. Ha ennél az értéknél kisebb feszültségekkel hatunk az adott anyagra, akkor az a terhelés megszűnése után visszanyeri eredeti alakját, azaz nem deformálódik.

Emellett az jellemző még erre a tartományra, amiről a nevét is kapta, hogy a feszültség és a fajlagos nyúlás között lineáris összefüggés van. Ezt nevezzük *Hooke-törvénynek,*[2] amelyben az arányossági tényezőt Young-modulusznak[3] (E) nevezzük:

(30) $$\sigma = E\,\varepsilon$$

Mivel ε egy dimenziótlan arányszám, σ mértékegysége pedig N/m^2, ezért E mértékegysége is N/m^2.

A következő jellegzetes feszültségérték σ_E *(elastic),* amelynél kisebb, de σ_P-nél nagyobb feszültségértékekre a Hooke-törvény már nem érvényes, azaz a σ és az ε közötti kapcsolat nem lineáris, de a test a legfeljebb σ_E nagyságú feszültségértékek esetében még mindig az eredeti alakját veszi fel a terhelés megszűnése után. A σ_E értéke jellemzően nagyon közel van σ_P-hez.

---

2 Robert Hooke (1635–1703), angol polihisztor, természetfilozófus, mérnök.

3 Thomas Young (1773–1829), angol polihisztor, fizikus.

Az anyag a σ_{YU} *(upper yield)* feszültségnél, az úgynevezett felső folyáshatáron folyik meg. A $\sigma_E < \sigma < \sigma_{YU}$ értékek esetében az anyag már visszafordíthatatlanul deformálódik: a terhelés megszűnése után nem eredeti állapotába, hanem egy kicsit megnyúlt alakba tér vissza. Ezt jelölik a szaggatott ferde vonalak, amelyek a görbe végéig azonosan jelennek meg, és meredekségük mindenhol a Young-modulusz.

A megfolyás után a feszültség hirtelen leesik az alsó folyáshatár értékére (σ_{YL}) *(lower yield),* amelyet egy hosszabb-rövidebb platószakasz követ. Ezalatt a feszültség nagyon keveset változik, utána azonban elkezdődik az anyag felkeményedése: a σ_{US} *(ultimate strength)* érték eléréséig újra növekszik a feszültség a deformációval.

Ennél a maximális értéknél már nem tud tovább növekedni az anyagban a feszültség: ha növeljük a deformációt, elkezdődik a nyakképződés. Ez azt jelenti, hogy egy keresztmetszet mérete elkezd csökkenni, és ez pozitív visszacsatolással gyorsan az anyag szakadását okozza ebben a keresztmetszetben.

Az eddig elmondott feszültségértékek azonban annak felelnek meg, mintha a keresztmeszet végig állandó A_0 értékű lenne (4. ábra, folytonos vonal). Azonban ez nem igaz, hiszen minél nagyobb a fajlagos nyúlás, annál nagyobb a keresztmetszeti kontrakció, azaz az aktuális A felülete a keresztmetszetnek mindig kisebb a kiindulási A_0-nál. Ezzel a változással korrigálva kapjuk a 4. ábrán szaggatottal jelzett görbét, amelyből azt látjuk, hogy a feszültség a σ_{US}-nek megfelelő deformáció elérésénél „elszáll", és a nyakképződés helyén, a szakadási pontban lesz a legnagyobb a feszültség értéke közvetlenül a szakadás előtt.

Mindez azonban csak deformálható anyagokra igaz. Rideg anyagok sokkal kisebb deformáció hatására, illetve az annak megfelelő, úgynevezett törőfeszültségnél (σ_B) *(brittle)* eltörnek, nem pedig megfolynak. A beton például az összenyomással ellentétben húzásra nagyon rosszul terhelhető, ezért esetében $\sigma_B = 0$ értékkel szoktak számolni.

Kiintegrálva a szakítódiagram alatti területet, megkapjuk az adott deformáció eléréséhez befektetett munkát.

2.6. Méretezés húzásra és nyomásra

Megkülönböztetünk úgynevezett zömök rudakat és karcsú rudakat. Egy zömök rúd hossza nagyságrendileg összemérhető az átmérőjével, míg egy karcsú rúd hossza lényegesen nagyobb az átmérőjénél. Az ezután tárgyalandó

tulajdonságok csak zömök rudakra igazak, karcsú rudak esetében ugyanis a kihajlást is figyelembe kell venni, amivel a 7. fejezetben fogunk részletesebben foglalkozni.

2.6.1. Rudak szimmetriái húzásra és nyomásra

A szemközti lapjainak súlypontjaiban ellentétes irányítottságú, de azonos nagyságú erőkkel húzásra vagy nyomásra terhelt állandó keresztmetszetű egyenes rúd egyes keresztmetszeteiről elmondhatóak a következő tulajdonságok:

a) A terhelés előtt sík keresztmetszetek a terhelés hatására is síkok maradnak.
b) Méretük húzáskor csökken, nyomáskor nő, de alakjuk az eredetihez hasonló marad.
c) Ha három keresztmetszet terheletlen állapotban párhuzamos volt, a terhelés hatására is párhuzamosak maradnak, és távolságaik aránya nem változik.

2.6.2. A megengedett feszültség

Méretezésnél az alapvető cél, hogy az alkatrészek úgy kerüljenek kialakításra, hogy az igénybevétel során ne szenvedjenek maradandó alakváltozást. Ez azt jelenti, hogy az egyes elemekben fellépő feszültségek sose érjék el az adott elemre jellemző (a 4. ábra szakítódiagramján bemutatott) rugalmassági határ értékét (σ_E).

Azonban nem mindegy a terhelés módja sem. Egy statikus terhelés, amikor a feszültség állandó, kevésbé veszi igénybe az anyagot, mint egy impulzusszerűen megjelenő feszültség. Ez alapján három esetet különböztetünk meg, amelyeket Wöhler-eseteknek nevezünk:

1. Statikus (nyugvó) terhelés: az alkatrészt állandóan ugyanaz az erő terheli. Ilyen például egy csillár felfüggesztésére ható erő.
2. Lüktető terhelés: a testre ható erő értéke nullától egy (adott előjelű) maximális értékig változik. Ilyen például egy felvonó kötelére ható erő.
3. Lengő (váltakozó) terhelés: az erő két (azonos vagy ellentétes előjelű) szélsőérték között váltakozik. Ilyen például egy dugattyú

hajtókarja (váltakozó irányú erő) vagy egy híd feszítőkábelei (amelyeket a híd önsúlya mellett a forgalom is húzásra terhel).

A szerkezetek számára kifáradás szempontjából az 1. eset a legkedvezőbb, a 3. a legkedvezőtlenebb, amelyekre a 12. fejezetben még részletesen visszatérünk.

A biztonságos méretezés érdekében a folyáshatárt (rideg anyagoknál törési szilárdságot, σ_B-t) egy n biztonsági tényezővel osztják el. Ez az 1-nél nagyobb szám valójában egy szorzat, a következő tényezőkből állhat: az anyagtulajdonságok bizonytalansága (jellemző feszültségértékek mérési hibája, inhomogenitás, maradékfeszültségek), a terhelés bizonytalansága (nagyság, jelleg – Wöhler-esetek), a számítás bizonytalansága (modellválasztás, közelítések) és a biztonsági szempontok (a meghibásodás veszélyeztet-e életet, vagy nem).

Ennek megfelelően az úgynevezett megengedett feszültség (σ_{meg}) a folyáshatár n-ed része:

$$\sigma_{meg} = \frac{\sigma_Y}{n} \tag{31}$$

A méretezés és az ellenőrzés célja, hogy a fellépő maximális feszültség ne lépje túl σ_{meg}-et.

Méretezésnek nevezzük, amikor ismerjük a terhelő erő(ke)t, és ez alapján határozzuk meg a szerkezet méreteit. Ellenőrzésnek nevezzük, amikor a szerkezet méreteit ismerve leellenőrizzük, hogy a fellépő erő(k) által keltett feszültségek kisebbek-e σ_{meg}-nél, illetve hogy mekkora az a legnagyobb terhelés, ami ezt a feltételt még teljesíti.

Húzás és nyomás esetében tehát a méretezés során használandó összefüggés a (22) összefüggésnek a σ_{meg} felhasználásával módosított változata:

$$A = \frac{F}{\sigma_{meg}} \tag{32}$$

ellenőrzésnél pedig vagy a

$$\sigma_{meg} \overset{?}{\geq} \sigma = \frac{F}{A} \tag{33}$$

relációt vizsgáljuk, vagy a maximálisan megengedhető terhelőerőt, az úgynevezett törőerőt (F_{max}) határozzuk meg a keresztmetszet ismeretében, szintén a (22) átrendezésével:

(34) $$F_{\max} = A\sigma_{\text{meg}}$$

A biztonság növelésére azonban nem lehet megoldás a túlméretezés, egyrészt mivel egy túlméretezett alkatrész másik alkatrészeket szükségtelenül igénybe vehet, valamint az anyagtakarékosság is fontos szempont. Ennek elkerülése érdekében szabály, hogy a maximális feszültség legfeljebb 5%-kal lehet kisebb a megengedett feszültségnél:

(35) $$\sigma_{\text{meg}} \geq \sigma_{\max} \geq 0{,}95\sigma_{\text{meg}}$$

2.7. A felületi és a palástnyomás

A nyomó igénybevételnek két speciális esete létezik, amikor is a nyomóerő nem koncentrált erő, hanem egy felületen megoszló erőrendszerként hat.

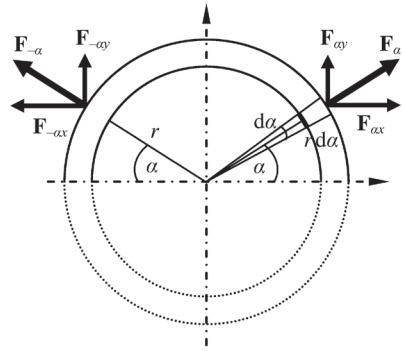
Az úgynevezett *felületi nyomás* esetében a nyomóerő egy sík felületen oszlik meg. Ez a helyzet például alapozásoknál, tartók felfekvési felületeinek kialakításánál stb. Ekkor nem a felületre ható össznyomást, hanem annak egységnyi felületre eső nagyságát számoljuk, amely egyenletesen megoszló erőrendszer esetén éppen a megoszló erőrendszer nagyságával egyezik meg:

(36) $$\overline{p} = \frac{\int_A q \,\mathrm{d}A}{A} = \frac{\overline{F}}{A}$$

ahol $\overline{F}$ a teljes nyomóerő. A számolás során impliciten feltételezzük, hogy a nyomás egyenletesen oszlik el a felületen. Ez azonban csak akkor helytálló, ha egy lefelé szélesedő szerkezet vagy építmény esetén a külső falnak a függőlegessel bezárt szöge például beton esetében kisebb, mint π/4, vagy például tégla esetében mint π/3.

A *palástnyomás* esetében az erő nem vízszintes, hanem görbült felületen oszlik meg. Vegyünk egy belső túlnyomással terhelt, *r* sugarú, vékony falú (azaz az átmérőjéhez képest elhanyagolható vastagságú) csövet (5. ábra). Ekkor a belső *p* túlnyomás mindenütt egy sugárirányú megoszló erőrendszerként hat. Vágjuk szét a csövet egy átmérője mentén, és tekintsük az így keletkezett idomnak egy ℓ hosszúságú darabját. A cső tengelyéből α szögnél dα szög alatt látszó, a tengely mentén ℓ hosszúságú dA felületű csőelem területe

(37) $$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\alpha\,\ell$$



5. ábra

Mivel az erő a nyomás és a felület szorzata, a csőelemet terhelő helyettesítő koncentrált erőt kiszámítva, majd a (37)-et behelyettesítve megkapjuk, hogy a csőelem egy dα középponti szöggel jellemezhető darabjára ható terhelő erő

(38) $$F_{\alpha} = p\,\mathrm{d}A = p\,r\,\mathrm{d}\alpha\,\ell$$

Bontsuk fel ezt az erőt vízszintes és függőleges irányú $F_{\alpha x}$ és $F_{\alpha y}$ komponensekre. Viszont a rendszer szimmetriája miatt a csődarab másik oldalán α szögnél is hatnia kell egy ugyanekkora abszolút értékű $\mathbf{F}_{-\alpha}$ erőnek, amelynek a vízszintes és függőleges komponenseinek abszolút értékei megegyeznek $\mathbf{F}_{\alpha}$-éval:

(39) $$F_{\alpha x} = F_{-\alpha x} \text{ és } F_{\alpha y} = F_{-\alpha y}$$

viszont az x irányú komponensek irányítottsága ellentétes, vagyis ezek vektoriális összege **0**, míg az y irányú komponensek irányítottsága azonos, vagyis ezek összeadódnak. Mivel

(40) $$F_{\alpha y} = F_{\alpha}\sin(\alpha)$$

behelyettesítve a (38)-at kapjuk:

(41) $$F_{\alpha y} = p\,\mathrm{d}A = p\,r\,\mathrm{d}\alpha\,\ell\sin(\alpha)$$

amelyet a teljes α szögtartományra, azaz 0-tól π-ig kiintegrálva és az átmérőt d-vel jelölve kapjuk:

$$(42)\quad F = F_y = \int_0^{\pi} p\, r\, \ell \sin(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = p\, r\, \ell \int_0^{\pi} \sin(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = 2\, p\, r\, \ell = d\, p\, \ell$$

ahonnan a fél csőre ható palástnyomást kifejezve (a $d = 2r$ helyettesítéssel):

$$(43)\quad p = \frac{F}{d\,\ell}$$

2.8. Hőtágulás

Hőmérséklet-változás hatására a testek mérete megváltozik. Bár sok esetben ezt a méretváltozást az adott szerkezet fel tudja venni, nem ritka, hogy rögzített volta miatt a test nem tud deformálódni, és ezért húzó- vagy nyomófeszültségek ébrednek benne. Most csak a lineáris hőtágulással foglalkozunk, azaz úgy tekintünk a test méretváltozására, hogy annak a hőmérséklet-változással csak egy dimenziója változik meg mérhetően.

A kezdeti hőmérsékletet T_0-lal, a végső hőmérsékletet T_1-gyel jelölve a hőmérséklet-különbség (függetlenül attól, hogy a hőmérsékletet magát K-ben vagy °C-ban mérjük, lévén 1 kelvinnyi hőmérséklet-különbség 1 Celsius-foknyi hőmérséklet-különbséggel azonos):

$$(44)\quad \Delta T = T_1 - T_0$$

A hőtágulás alapegyenlete ezen ΔT hőmérséklet-változás és a hatására (egy irányban) létrejövő hosszváltozás közötti lineáris összefüggést írja le. Ha a test hossza a hőmérséklet-változás hatására kezdeti ℓ_0 értékről ℓ_1 értékre változik, akkor a (17) alapján definiálható megnyúlás és a hőmérséklet-változás közötti kapcsolat:

$$(45)\quad \Delta\ell = \alpha\, \ell_0 \Delta T$$

ahol α az úgynevezett lineáris hőtágulási együttható, mértékegysége 1/K (vagy 1/°C). Értéke a legtöbb anyagra pozitív (bár akadnak extrém kivételek, mint például a köbös cirkónium-volframát), azaz hőmérséklet-növekedésre tágulás az anyagok reakciója, hőmérséklet-csökkenésre összehúzódás.

A (45) egyenlet érvényességi körét két körülmény korlátozhatja: α értéke a hőmérséklet változásával változhat, valamint a számolt hosszváltozásnak

sokkal kisebbnek kell adódnia a kiindulási hossznál (azaz $\Delta\ell \ll \ell$), eltérő esetben pontosabb számolást igényel a feladat.

Ismerve α konkrét értékét, a (18)-ba behelyettesítve (45)-öt, megkapjuk a fajlagos nyúlást adott hőmérséklet-változás esetén:

(46) $$\varepsilon = \alpha\,\Delta T$$

amelyből a (30), a Hooke-törvény alapján számolható a fellépő feszültség, ha a test nem tud deformálódni (például fixen be van fogva mindkét oldalán):

(47) $$\sigma = -E\,\alpha\,\Delta T$$

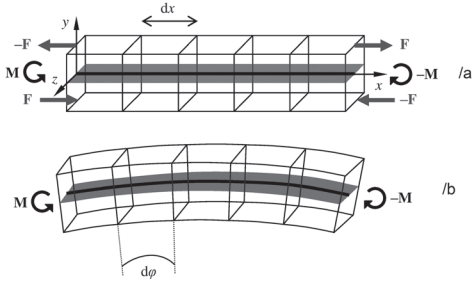
amelyben a negatív előjel azért szükséges, mert hőmérséklet-növekedés, azaz pozitív ΔT hatására nyúlás történik, ez viszont nem pozitív, hanem nyomó-, azaz negatív feszültséget okoz a testben, ha az ezt a nyúlást nem tudja felvenni. Az ilyenkor fellépő feszültségek akár extrém nagyok is lehetnek, ezért mindig meggondolandó a fix befogás helyett olyan rögzítés alkalmazása (amikor lehetséges), hogy a szerkezet szabadon tudjon tágulni-összehúzódni, elkerülendő a befogásban is és a szerkezetben is esetleg szükségtelenül fellépő feszültségeket.

Hosszú egyenes szerkezeteknél, például távhővezetékekben, már egészen kis hőmérséklet-változás is σ_{meg}-nél nagyobb feszültséget eredményezne, amely vagy töréshez, vagy kihajláshoz (lásd később a 7. fejezetben) vezetne, ezért ezekbe bizonyos távolságonként Ω alakú részeket, úgynevezett cső-lírákat építenek be, amelyek lehetővé teszik a hőtágulást, és így eliminálják a feszültségeket. De a megfelelően stabil rögzítés lehetősége előtt ezért hagytak rést a vasúti sínszálak között is.

3. Hajlítás

A tiszta húzáshoz az egyensúlyhoz szükséges $\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{0}$ és $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ feltételek mellett az $\mathbf{M}_i = \mathbf{0}$ szükséges feltételt fogalmaztuk meg. Azt gondolhatnánk, hogy tiszta hajlításhoz ezzel szemben az egyensúlyhoz szükséges két első vektoregyenlet mellett az $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ feltételnek kell teljesülnie. Ez nagy skálán nézve igaz is, de koncentrált forgatónyomatékot csak erőpárral tudunk létrehozni, amelynek legyen bármilyen kicsi is a karja, az nem lehet nulla.

A tiszta hajlítás tehát úgy valósítható meg, ha egy rúdra a két végén egy-egy koncentrált forgatónyomatékkal hatunk, és az ezeket megvalósító erőpárok karjai a rúd hosszához képest elhanyagolhatóak.



6. ábra

A rúd felső része a 6. ábrán láthatóan húzásra, az alsó része nyomásra van terhelve, ezek között kell tehát lennie egy olyan vízszintes síknak, amelyik egyikre sincs. Ezt jelöltük a 6. ábrán szürkével, neve semleges réteg. Mivel azonos **F** erőkkel terheltük meg a rudat, az úgy fog meghajlani, hogy az egyes keresztmetszetek olyan, *z* tengellyel párhuzamos egyenesek körül fognak elfordulni, amelyek az egyes keresztmetszeteket olyan két síkidomra osztják, amelyeknek azonos az elsőrendű nyomatéka. Ezekről az egyenesekről pedig tudjuk, hogy a keresztmetszetek súlypontjain mennek át.

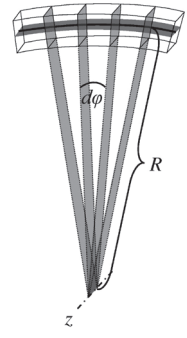
Ebből két dolog következik. Az egyik, hogy a semleges réteg pontosan ez, az egyes síkok *z* tengellyel párhuzamos, súlyponton átmenő szakaszainak összessége, az *xz* sík.

A másik, hogy az egyes keresztmetszetek súlypontjait összekötő egyenes, a rúd tengelye, amely része a semleges rétegnek, bármilyen tengely körül történő hajlításra csak deformálódik (meggörbül), de a hossza nem változik, ezért nevezzük semleges szálnak vagy rugalmas szálnak is. Az elnevezés onnan jön, hogy a rudat számolásaink során tekinthetjük nagyon sok „végtelenül vékony", x tengellyel párhuzamos szál összességének.

3.1. Feszültségeloszlás szimmetrikus keresztmetszet esetén

Vegyünk tehát egy, a 6/a ábra szerinti ℓ hosszúságú rudat, amelyen kijelölünk a rúd tengelyére merőleges, egymástól a rúd hosszához képest „végtelen kicsi" dx távolságra levő keresztmetszeteket. Ha a rudat megterheljük tiszta hajlításra, akkor a kezdetben párhuzamos keresztmetszetek síkjai a terhelés hatására a 6/b ábra szerint dφ szöget fognak egymással bezárni. Azt a z tengellyel párhuzamos tengelyt, ahol az így elfordult keresztmetszetek síkjai metszik egymást, a hajlítás tengelyének nevezzük. Ugyanakkor az egyes keresztmetszetek az egyes szálakra ugyanúgy merőlegesek lesznek, mint a hajlítás előtt voltak.

A hajlítás tengelyének a rúd tengelyétől való távolságát görbületi sugárnak (R) nevezzük (7. ábra). A továbbiakban csak olyan esetekkel fogunk foglalkozni, amikor igaz, hogy a rúd tengelyre merőleges dimenziói (például kör alakú rúd esetében az átmérő, d) sokkal kisebbek a görbületi sugárnál.



7. ábra

Vizsgáljuk meg, milyen feszültségek lépnek fel ebben a rendszerben! Mivel a semleges szál hossza nem változik meg a hajlítás során, felírhatjuk rá a

(48) $$\mathrm{d}x = R\,\mathrm{d}\varphi$$

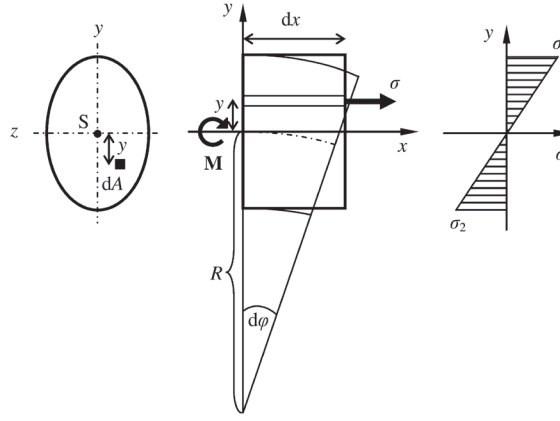
egyenlőséget, hiszen a semleges szál adott dx hosszúságú rúdelembe eső szakaszának hossza meg kell hogy egyezzen a rúdelem hosszával, és a hajlított rúdban ez a hajlítás tengelye köré írt R sugarú kör dφ középponti szöghöz tartozó ívének hosszával fog megegyezni. Bár a rugalmas szál körívvel való helyettesítése szigorúan véve csak egy közelítés, ennek jogos alkalmazásához külön-külön az $R \gg d$ vagy a $\mathrm{d}x \ll \ell$ feltétel is elegendő lenne, de itt mindkettőt feltettük.

Válasszunk ki egy adott keresztmetszetben egy dA nagyságú felületelemet (8. ábra), amelynek a semleges rétegtől vett távolsága legyen y, amelynek előjele nem az y tengely irányítottságától függ, hanem fordítva: az y tengely irányítottságát válasszuk meg úgy, hogy a rúd nyomott részében y negatív, húzott részében pozitív legyen. Ekkor a szál, amelyhez ez a felületelem tartozik, (az y irányától függően) $R \pm y$ távolságra lesz a hajlítás tengelyétől. Ez azt is jelenti, hogy bár a hajlítás előtt a szál rúdelembe eső hossza dx volt, mint minden más szálnak, a meghajlított állapotban, bár a hozzá tartozó középponti szög változatlanul dφ, a görbületi sugár, amelyhez tartozik, $R \pm y$, ezért a hossza is más lesz:

(49) $$\ell_1 = \left(R \pm y\right)\mathrm{d}\varphi$$

amelyből a (18) felhasználásával a fajlagos nyúlás

(50) $$\varepsilon = \frac{(R \pm y)\,\mathrm{d}\varphi - R\,\mathrm{d}\varphi}{R\,\mathrm{d}\varphi} = \pm\frac{y}{R}$$



8. ábra

Mivel feltettük, hogy a deformáció csak akkora, hogy a Hooke-törvény még érvényes a rendszerre, ezért annak segítségével kifejezhetjük a feszültséget is:

$$\sigma = E\,\varepsilon = \frac{E\,y}{R} \tag{51}$$

Láthatjuk, hogy a kiválasztott dA felületelemen fellépő feszültség nagysága adott Young-moduluszú anyagra, adott mértékű (azaz a rúd tengelyének adott R görbületi sugarú körívvé deformálódását eredményező) hajlítás mellett egyedül a felületelemnek a rúd tengelyétől vett távolságától függ. A semleges rétegben nulla a fellépő feszültség nagysága (innen a réteg neve), a rúd szélén maximális, a kettő között pedig lineárisan változik y függvényében.

Fontos még megjegyezni, hogy a fellépő feszültség valóban csak a semleges rétegtől való távolságtól függ: amely szálak azonos irányban azonos távolságra vannak tőle, azokra azonos nagyságú (és irányú) feszültség hat.

Számítsuk most ki annak a forgatónyomatéknak a nagyságát, amely adott nagyságú σ hajlítófeszültséget okoz! Megvizsgálva a szélső rúdelemet, láthatjuk, hogy az egyik oldalán a hajlítást eredményező M forgatónyomaték hat, ezzel a rúdelem másik oldalán fellépő σ feszültség tart egyensúlyt. Ez azonban elmondható minden egyes rúdelemre: a két oldalukon végig ekvivalens forgatónyomatékoknak kell hatniuk.

Mivel y és z irányú külső és belső erők nincsenek a rendszerben, ezért az ezen irányú erők összegének nulla voltát kifejező egyenletek semmitmondóak, csak az x irányú erők összegére van értelme az egyensúlyi egyenleteket felírni:

$$\sum_i F_{i,x} = \int_A \sigma \,\mathrm{d}A = 0 \tag{52}$$

Hasonlóan, a három forgatónyomaték-komponens közül csak a z irányú ad nem triviális eredményt, hiszen ez az a tengely, amely körül az x irányú erők forgatnak:

$$\sum_i M_{i,z} = \int_A y\,\sigma \,\mathrm{d}A - M = 0 \tag{53}$$

Az integrandusban a jobb oldalra ható feszültségekből származó elemi erők (σ dA) és erőkarjaik (y) szorzatát láthatjuk a forgatónyomaték definíciójának megfelelően, amelynek a bal oldalra ható forgatónyomatékkal együtt kell nullát adnia. Behelyettesítve az (51) kifejezést, majd a konstans tagokat

az integrálás elé kihozva kapjuk (az y irányítottsága, azaz a ± előjel itt már nem számít, hiszen négyzetre emelve biztosan pozitív számot kapunk):

$$\int_A y \frac{E\,y}{R}\,\mathrm{d}A - M = 0 \tag{54}$$

$$\frac{E}{R}\int_A y^2\,\mathrm{d}A = M \tag{55}$$

Az integrál értéke függ nemcsak a keresztmetszet nagyságától, hanem annak alakjától is. Ez a mennyiség a keresztmetszet úgynevezett *másodrendű nyomatéka* (*second moment of area* vagy *area moment of inertia*), amelyet I-vel jelölünk, mértékegysége m^4. Ezzel a helyettesítéssel az egyensúlyi egyenlet:

$$\frac{M}{I\,E} = \frac{1}{R} \tag{56}$$

amelyet (48)-ba behelyettesítve azt kapjuk, hogy állandó keresztmetszetű rúd esetében a rugalmas szál körív alakban görbül meg tiszta hajlítás hatására:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M}{I\,E}\,\mathrm{d}x \tag{57}$$

ahol az $I\,E$ szorzatot *hajlítómerevségnek* nevezzük.

Az (56)-ból az E/R hányadost kifejezve és (51)-be behelyettesítve megkapjuk a tiszta hajlításkor a rúd semleges rétegétől y távolságra levő szálakban fellépő feszültséget, az úgynevezett *Navier-képletet,*[4] amely a hajlítás alapegyenlete:

$$\sigma = \frac{M}{I}\,y \tag{58}$$

Ez alapján a semleges rétegtől távolodva a feszültség a távolsággal lineárisan növekszik, és minden, a semleges rétegtől adott y távolságra levő szálban azonos.

A semleges rétegtől pozitív irányban legnagyobb távolságban található szál, az úgynevezett szélső szál semleges rétegtől való távolságát jelöljük e_1-gyel, a negatív irányban legnagyobb távolságra található szál semleges rétegtől való távolságát pedig e_2-vel. Ha a rúd tiszta hajlításra van terhelve,

[4] Claude-Louis Navier (1785–1836), francia mérnök, fizikus.

akkor ehhez a két távolságértékhez tartozik a feszültség két szélsőértéke, amelyeket σ_1-gyel és σ_2-vel jelölünk. Olyan rudakra, amelyeknél a két szélső szál távolságának azonos az abszolút értéke, azokra $e_1 = e_2$, amiből következik, hogy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{max}$.

A Navier-képletbe tehát a szélső szálak e_1 és e_2 távolságát behelyettesítve y helyére megkaphatjuk a keresztmetszeten fellépő maximális hajlítófeszültséget:

(59) $$\sigma_{max} = \max\left(\frac{M}{I}e_1; \frac{M}{I}e_2\right)$$

Szimmetrikus keresztmetszetet, azaz azt feltételezve, hogy $e = e_1 = e_2$, a maximális feszültséget

(60) $$\sigma_{max} = \frac{M}{I}e = \frac{M}{I/e}$$

alakban kapjuk meg, ahol az I/e hányadost *keresztmetszeti tényezőnek (section modulus)* nevezzük, és K-val jelöljük:

(61) $$K = \frac{I}{e}$$

Ezzel a jelöléssel a (60) egyenletben a maximális feszültség:

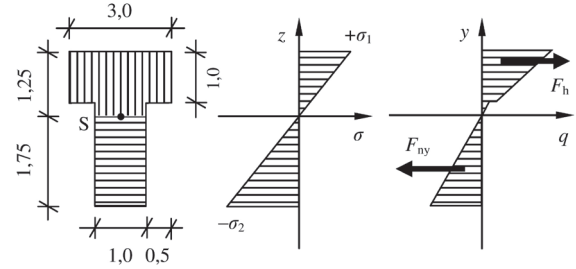
(62) $$\sigma_{max} = \frac{M}{K}$$

3.2. Feszültségeloszlás aszimmetrikus keresztmetszet esetén

Tiszta hajlításra terhelt aszimmetrikus keresztmetszetű rúd esetében is a semleges szál az egyes keresztmetszetek súlypontjain átmenő (még terheletlen állapotban az x tengellyel párhuzamos) szál, mivel az erre merőleges keresztmetszetek a súlypontjaikon átmenő, z tengellyel párhuzamos egyenesek körül fognak elfordulni.

A 9. ábrán látható T-tartó súlypontját és másodrendű nyomatékát meghatározva a Navier-képlet alapján meg tudjuk mondani a két szélső szálban ébredő feszültségek nagyságát. Az (58) linearitásából következik, hogy mivel a felső szál közelebb van a semleges réteghez, mint az alsó, ezért $\sigma_1 < \sigma_2$.

Az egyensúly azonban nem a maximális húzó- és a nyomófeszültségek egyenlőségétől, hanem a helyettesítő koncentrált erőik egyenlőségétől függ.



9. ábra

A helyettesítő erőt a megoszló σ erőrendszer és a keresztmetszet szélességének szorzataként számíthatjuk, az y tengely mentén végigintegrálva 0-tól a szélső szál távolságáig:

$$(63) \qquad \int_0^{1,75} 1\sigma(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{1,75} 1\left(\sigma_2 \frac{y}{e_2}\right)\mathrm{d}y = \int_0^{1,75} 1\frac{\sigma_2}{1,75}\,y\,\mathrm{d}y = 0,875\sigma_2$$

$$(64) \qquad \int_0^{0,25} 1\sigma(y)\,\mathrm{d}y + \int_{0,25}^{1,25} 3\sigma(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{0,25} 1\left(\sigma_1 \frac{y}{e_1}\right)\mathrm{d}y + \int_{0,25}^{1,25} 3\left(\sigma_1 \frac{y}{e_1}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^{0,25} 1\frac{\sigma_1}{1,25}\,y\,\mathrm{d}y + \int_{0,25}^{1,25} 3\frac{\sigma_1}{1,25}\,y\,\mathrm{d}y = 0,625\sigma_1$$

a Navier-képlet linearitásából pedig következik, hogy

$$(65) \qquad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1,25}{1,75}$$

amelybe behelyettesítve (63)-at és (64)-et valóban azonossághoz jutunk.

Itt most egy felület menti integrálást végeztünk: az egyes vízszintes „rétegekre” a keresztmetszet szélességét, azaz z tengely menti méretét (amelynek dimenziója méter) összeszoroztuk a feszültség mint felületen megoszló

erőrendszer azonos rétegbeli értékével (amelynek dimenziója N/m^2). Ezzel megkapjuk a 9. ábrán látható q vonal mentén megoszló erőrendszert, amelyet az y tengely mentén integrálunk, és így megkapjuk a két helyettesítő koncentrált erőt.

Látható, hogy ahol a keresztmetszet szélessége megnő, ott a hajlítóerő is ugrásszerűen megnő. Az ilyen tartományokra a későbbiekben fokozott figyelmet fogunk fordítani.

3.3. A másodrendű nyomaték

A 3.1. fejezetben bevezettük a másodrendű nyomaték fogalmát mint az

$$I = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A \tag{66}$$

helyettesítést. Azonban ez annak a problématípusnak megfelelő másodrendű nyomaték, mivel mint látni fogjuk, három hasonló mennyiséget is definiálunk, amelyek közül mindig az adott igénybevételnek megfelelőt kell alkalmazni. Ahogy ott is megjegyeztük, ez a mennyiség minden keresztmetszetre más, sőt, amint látható az integrálból, koordinátarendszer-függő is, viszont a keresztmetszet terhelésétől és anyagától nem függ.

Legyen adott tehát egy síkidom és egy *xyz* jobbsodrású koordinátarendszer úgy, hogy a síkidom ennek az *xy* síkjában feküdjön. Nevezzük azt a pontot, ahol a *z* tengely az *xy* síkot metszi, O pontnak. Válasszunk ki egy „végtelenül kicsi” dA felületelemet a síkidomon, amelynek x tengelytől való távolságát x-szel, y tengelytől való távolságát y-nal és az O ponttól való távolságát r-rel jelöljük. Természetesen euklideszi geometriában dolgozunk, ezért igaz a Pitagorasz-tétel:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{67}$$

3.3.1. Tengelyre vett másodrendű nyomaték

Adott tengelyre vett másodrendű nyomatékot úgy számolhatunk, hogy az egyes felületelemek tengelytől vett távolságának a négyzetét vesszük, és ezeket az értékeket összeintegráljuk a teljes felületre.

Az x tengelyre vett másodrendű nyomaték tehát

$$I_x = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A \tag{68}$$

az y tengelyre vett másodrendű nyomaték pedig

$$I_y = \int_A x^2 \, \mathrm{d}A \tag{69}$$

Ezeket az értékeket használjuk a tiszta hajlítás és majd a nyírás számolásakor: a semleges rétegnek és az adott keresztmetszetnek a metszete a tengely, amelyre ezt számolni kell. Mivel az integrandus egy második hatvány, ezért I_x és I_y értéke csak pozitív lehet.

3.3.2. Centrifugális másodrendű nyomaték

A felületelem két tengelytől való távolságát külön-külön összeszorozva és ezeket a teljes felületre összeintegrálva kapjuk a centrifugális másodrendű nyomatékot (product of inertia):

$$I_{xy} = \int_A xy \, \mathrm{d}A \tag{70}$$

Mivel ez az integrandus nem egy négyzet, ezért a dA felületelemek x és y tengelyekhez képesti helyzetétől függően I_{xy} értéke lehet pozitív és negatív is.

3.3.3. Pontra vett (poláris) másodrendű nyomaték

Csavarás számolásakor lesz szükségünk az úgynevezett poláris másodrendű nyomatékra, ekkor ugyanis, mint látni fogjuk, nincs semleges rétege a keresztmetszetnek, csak egy semleges szál, amely a csavarás tengelye. Ha ezt választjuk a z tengelynek, akkor az egyetlen pontban metszi az adott keresztmetszetet: annak középpontjában. Ha a dA felületelemek e ponttól vett r távolságának négyzetét integráljuk ki a teljes felületre, akkor kapjuk meg a poláris másodrendű nyomatékot:

$$I_\mathrm{p} = \int_A r^2 \, \mathrm{d}A \tag{71}$$

Ez gyakorlatilag megfelel a *z* tengelyre vett másodrendű nyomatéknak; értéke ennek is csak pozitív lehet.

Emeljük négyzetre a (67) egyenletet, és integráljuk ki a teljes felületen! Mivel összegfüggvény integrálása tagonként elvégezhető, így

$$\int_A r^2 \, \mathrm{d}A = \int_A x^2 \, \mathrm{d}A + \int_A y^2 \, \mathrm{d}A \tag{72}$$

ahova a (68), (69) és (71) definíciókat behelyettesítve kapjuk:

$$I_\mathrm{p} = I_x + I_y \tag{73}$$

amely, mivel a koordináta-rendszer az *xy* síkban szabadon elforgatható, egy általános tétel, miszerint egy síkidom adott pontra vett másodrendű nyomatéka megegyezik az adott ponton átmenő két merőleges tengelyre vett másodrendű nyomatékok összegével.

3.4. Nevezetes másodrendű nyomatékok

A következőkben kiszámítjuk néhány, a gyakorlatban gyakran használt keresztmetszet másodrendű nyomatékát.

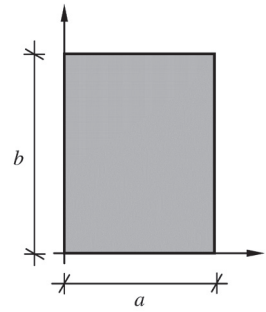
3.4.1. Téglalap

Adott egy *a* és *b* oldalú téglalap. Számítsuk ki ennek az oldalaira illeszkedő tengelyekre, valamint az oldalaival párhuzamos súlyponti tengelyekre a másodrendű nyomatékait!

3.4.1.1. Téglalap oldalra illeszkedő tengelyre vett másodrendű nyomatéka

Illeszkedjen az *a* oldal az *x*, a *b* oldal az *y* tengelyre (10. ábra). Az *x* tengelyre vett másodrendű nyomaték definíciója a (68) alapján

$$I_x = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A$$



10. ábra

Mivel itt a teljes felület az *ab* területű téglalap, az integrálást a két merőleges tengely mentén végezzük, először *x* szerint 0-tól *a*-ig, majd *y* szerint 0-tól *b*-ig, azaz a téglalap egyik oldalától a másikig.

$$(74)\quad I_{\text{téglalap},\,x} = \int_0^b \int_0^a y^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^b y^2 \int_0^a \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^b y^2 \left[x\right]_0^a \mathrm{d}y = a \int_0^b y^2 \mathrm{d}y = a \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{ab^3}{3}$$

$$I_{\text{téglalap},\,x} = \frac{ab^3}{3}$$

Ebben az esetben természetesen az *x* és az *y* szerinti integrálás felcserélhető, először *y* szerint, majd *x* szerint integrálva ugyanerre az eredményre jutunk.

Hasonlóan számolható I_y is, amelynél csak az integrandust kell a (69) alapján y^2-ről x^2-re cserélni:

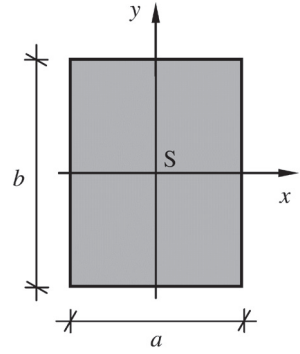
$$(75)\qquad I_{\text{téglalap},\,y} = \int_0^b \int_0^a x^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{a^3 b}{3}$$

Speciális eset a négyzet, amelyre $a = b$, így

$$(76)\qquad I_{\text{négyzet},\,x} = I_{\text{négyzet},\,y} = \frac{a^4}{3}.$$

3.4.1.2. Téglalap súlypontra illeszkedő tengelyre vett másodrendű nyomatéka

A súlypontra illeszkedő, *a* oldallal párhuzamos tengelyre vett másodrendű nyomaték (I_x) kiszámításához a koordináta-rendszer kezdőpontját el kell tolni úgy, hogy az *x* tengely ezzel egybeessen. Ekkor természetesen megváltoznak az integrálási határok: az *y* változó szerinti integrálást $-b/2$ és $+b/2$ között végezzük (a súlyponti tengely ilyen távolságra van a téglalap két élétől).



11. ábra

Az *y* tengelyt el is tolhatjuk a szimmetria kedvéért a súlypontba, ekkor az *x* változó szerint $-a/2$ és $+a/2$ között kell integrálni, de maradhat az egyik *b* oldalra illeszkedő is, ekkor 0-tól és *a*-ig kell integrálni.

(77)
$$I_{\text{téglalap},\,x,\,\text{sp}} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \left([x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right) \mathrm{d}y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \left(\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2} \right) \right) \mathrm{d}y =$$
$$a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \mathrm{d}y = a \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = a \left(\frac{b^3}{24} - \left(-\frac{b^3}{24} \right) \right) = \frac{ab^3}{12}$$

(78)
$$I_{\text{téglalap},\,x,\,\text{sp}} = \frac{ab^3}{12}$$

Mindkét koordinátatengelyt a súlypontba eltolva tehát az I_y ezzel analóg módon számítható, csak az integrandust kell megváltoztatni a (69) alapján y^2-ről x^2-re:

$$I_{\text{téglalap, } y, \text{ sp}} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{a^3}{12} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y = \frac{a^3 b}{12} \tag{79}$$

Mivel téglalap keresztmetszetű rúd tiszta hajlításánál e körül a tengely körül fordulnak el az egyes keresztmetszetek, ezért ebben az esetben ezt kell a Navier-képletben a másodrendű nyomaték helyére beírni.

Ismét felírva a négyzet mint az $a = b$ speciális esetben az egyik oldallal párhuzamos súlyponti tengelyre vett másodrendű nyomatékot:

$$I_{\text{négyzet, } x, \text{ sp}} = I_{\text{négyzet, } y, \text{ sp}} = \frac{a^4}{12} \tag{80}$$

3.4.1.3. Téglalap súlyponti centrifugális másodrendű nyomatéka

Számítsuk ki a súlypontra a centrifugális másodrendű nyomatékát is az a b oldalú téglalapnak (a 11. ábra jelöléseit felhasználva)! Felírva a (70) definíciót és integrálva az x változó szerint $-a/2$ és $+a/2$ között, az y változó szerint pedig $-b/2$ és $+b/2$ között kapjuk:

$$I_{\text{téglalap, } xy, \text{ sp}} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x\,y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \right) \mathrm{d}y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \cdot 0 \,\mathrm{d}y = 0 \tag{81}$$

$$I_{\text{téglalap, xy, sp}} = 0 \tag{82}$$

Az ok, amiért nullát kaptunk, a rendszer szimmetriájából következik. Az integrálási határok egymás (–1)-szeresei. Az integrandus (jelen esetben x) elsőfokú függvény, amelynek primitív függvénye másodfokú függvény, azaz a Newton–Leibniz-tétel alkalmazásakor a felső határ és az alsó határ esetében is minden előjel pozitív lesz, így két azonos számot vonunk ki egymásból. Az eredmény nem függ attól, hogy az x vagy az y szerinti integrálást végezzük el előbb.

A fenti gondolatmenet független a konkrét síkidomtól, ezért általánosságban is kimondható: egy adott síkidom centrifugális másodrendű nyomatéka

zérus olyan tengelyekre, amelyek közül legalább az egyik a síkidom valamelyik szimmetriatengelyével esik egybe.

3.4.1.4. Téglalap súlyponti poláris másodrendű nyomatéka

A (73) összefüggés felhasználásával a téglalap súlyponti poláris másodrendű nyomatéka:

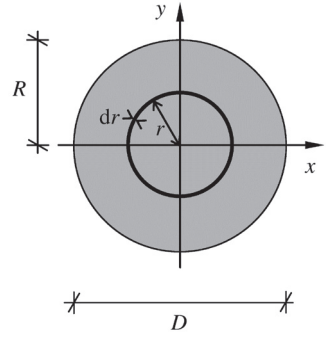
(83) $$I_{\text{téglalap, p, sp}} = \frac{a^3 b}{12} + \frac{a\,b^3}{12} = \frac{a\,b}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

3.4.2. Körlap

Adott egy R sugarú ($D = 2\,R$) körlap. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy az origó ennek középpontjában legyen, és számítsuk ki a másodrendű nyomatékokat! Az előző, 3.4.1.3. alfejezetben elmondottakból következik, hogy a centrifugális másodrendű nyomaték nulla.

3.4.2.1. Körlap poláris másodrendű nyomatéka

A poláris másodrendű nyomaték kiszámításához osszuk fel a körlapot olyan kicsi, „végtelenül keskeny” körgyűrűkre, amelyek szélessége dr (12. ábra).



12. ábra

Egy ilyen, a körlap középpontjától r távolságra levő körgyűrű területe

(84) $$\mathrm{d}A = 2\,r\,\pi\,\mathrm{d}r$$

Itt azt a közelítést tettük, hogy a körgyűrű külső széle végtelenül közel van a belső széléhez, ezért mindkettő kerülete $2r\pi$, bár távolságuk dr. Mivel integrálni fogunk, ezért a d$r \to 0$ határátmenet képzésekor ez határértékben teljesülni is fog.

A (71) alapján

$$I_{\text{kör,p}} = \int_A r^2\,\mathrm{d}A = \int_0^R r^2\,2\,r\,\pi\,\mathrm{d}r = 2\,\pi\int_0^R r^3\mathrm{d}r = \frac{2\,\pi R^4}{4} = \frac{\mathrm{D}^4\,\pi}{32}$$

(85) $$I_{\text{kör,p}} = \frac{D^4\pi}{32}$$

3.4.2.1. Körlap tengelyre vett másodrendű nyomatéka

Körlap keresztmetszetű rúd tiszta hajlításakor a hajlítás tengelye biztosan egy átmérő lesz, mivel minden, a súlyponton (azaz a körlap középpontján) átmenő egyenes mint tengely illeszkedik egy átmérőre. Egy ilyen tengelyre vett másodrendű nyomatékot a (73) alapján tudjuk legegyszerűbben meghatározni.

Mivel a kör szimmetriája miatt $I_{\text{kör},x,\text{sp}} = I_{\text{kör},y,\text{sp}}$, a (73) alapján

(86) $$I_{\text{kör, p}} = I_{\text{kör, }x\text{, sp}} + I_{\text{kör, }y\text{, sp}} = 2\,I_{\text{kör, }x\text{, sp}} = 2\,I_{\text{kör, }y\text{, sp}}$$

ahonnan (85) alapján

(87) $$I_{\text{kör, }x\text{, sp}} = I_{\text{kör, }y\text{, sp}} = \frac{\pi\,R^4}{4} = \frac{D^4\pi}{64}$$

3.4.3. Körgyűrű

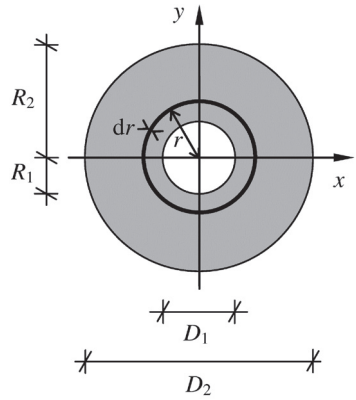
Adott egy R_1 és egy R_2 ($R_2 > R_1$) sugarú ($D = 2R_2$, $d = 2R_1$) koncentrikus körökkel határolt körgyűrű. A koordináta-rendszer origóját a körgyűrű középpontjában vegyük fel, és így számítsuk ki a másodrendű nyomatékokat! A 3.4.1.3. alfejezetben elmondottakból következik, hogy a centrifugális másodrendű nyomaték nulla, hiszen nemcsak az egyik, hanem mindkét koordinátatengely a körgyűrű szimmetriatengelye.

3.4.3.1. Körgyűrű poláris másodrendű nyomatéka

A körgyűrű poláris másodrendű nyomatékának kiszámítása a körlap poláris másodrendű nyomatékának meghatározásával analóg módon történik, a különbség mindössze az alsó integrálási határban van: az nem 0, hanem R_1 (hogy a felső integrálási határ nem R, hanem R_2, pusztán jelölésbeli különbség, lásd 13. ábra).

$$I_{\text{körgyűrű,p}} = \int_A r^2 \,\mathrm{d}A = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \, 2\,r\,\pi \,\mathrm{d}r = 2\,\pi \int_{R_1}^{R_2} r^3 \mathrm{d}r = \frac{2\,\pi\left(R_2^4 - R_1^4\right)}{4} = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{32}$$

(88)
$$I_{\text{körgyűrű,p}} = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{32}$$



13. ábra

3.4.3.2. Körgyűrű tengelyre vett másodrendű nyomatéka

Mivel, a körlaphoz hasonlóan, a körgyűrűnek is ekvivalens szimmetriatengelye az x és az y tengely, ezért $I_{\text{körgyűrű},x} = I_{\text{körgyűrű},y}$, amit a (73)-ba behelyettesítve kapjuk, hogy

(89) $$I_{\text{körgyűrű, p}} = I_{\text{körgyűrű, }x\text{, sp}} + I_{\text{körgyűrű, }y\text{, sp}} = 2\,I_{\text{körgyűrű, }x\text{, sp}} = 2\,I_{\text{körgyűrű, }y\text{, sp}}$$

ahonnan a (88) alapján

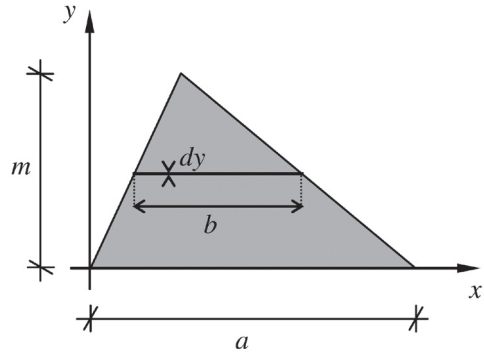
(90) $$I_{\text{körgyűrű},x,\text{sp}} = I_{\text{körgyűrű},y,\text{sp}} = \frac{\pi\left(R_2^4 - R_1^4\right)}{4} = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{64}$$

3.4.4. Háromszög

Számítsuk ki egy *a* alapú, *m* magasságú általános háromszög tengelyre vett másodrendű nyomatékát három különböző tengelyre: az oldalra; a súlypontra illeszkedő, oldallal párhuzamos; valamint a csúcsra illeszkedő, szemközti oldallal párhuzamos tengelyekre!

3.4.4.1. Háromszög oldalra illeszkedő tengelyre vett másodrendű nyomatéka

A háromszög alapjára illeszkedő tengelyre vett másodrendű nyomaték kiszámításához a háromszöget bontsuk fel kis, dA nagyságú felületelemekre a következőképpen (14. ábra).



14. ábra

Legyen dA egy olyan „trapéz”, amelynek alapjai az *a* oldallal párhuzamosak, magassága pedig dy. Ha az *y* tengely mentén a felosztást minden határon túl finomítjuk, azaz d$y \to 0$, akkor a trapéz két alapjának hossza ugyanahhoz az értékhez tart, jelöljük ezt *b*-vel. Ekkor a dA felületelem egy „téglalappá” fajul, amelynek területe:

(91) $$\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$$

Ha a dA felületelem x tengelytől való távolságát y-nal jelöljük, akkor az a alapú, m magasságú háromszög hasonló a b alapú, $(m - y)$ magasságú háromszöghöz (mivel belső szögeik megegyeznek, hiszen egy szögük közös, a másik két szögük pedig párhuzamos szárú, egészen pontosan egyállású szögek). Ebből következik, hogy megfelelő oldalaik arányai azonosak:

(92) $$\frac{a}{b} = \frac{m}{m-y}$$

Innen b-t kifejezve és behelyettesítve (91)-be kapjuk:

(93) $$\mathrm{d}A = \frac{a\,(m-y)}{m}\,\mathrm{d}y$$

A tengelyre vett másodrendű nyomaték (68)-beli definíciójába ezt behelyettesítve és az integrált a 0 és m határok között kiértékelve:

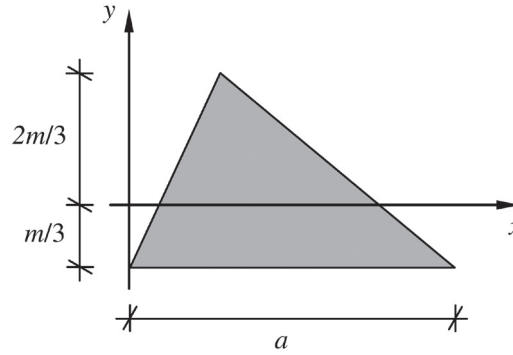
$$I_{\Delta,x} = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_0^m y^2\,\frac{a\,(m-y)}{m}\,\mathrm{d}y = \int_0^m y^2 a\,\mathrm{d}y - \int_0^m y^2\,\frac{a\,y}{m}\,\mathrm{d}y = a\int_0^m y^2\,\mathrm{d}y - \frac{a}{m}\int_0^m y^3\,\mathrm{d}y =$$

$$= a\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^m - \frac{a}{m}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^m = \frac{a\,m^3}{3} - \frac{a\,m^4}{4\,m} = \frac{a\,m^3}{12}.$$

(94) $$I_{\Delta,x} = \frac{a\,m^3}{12}$$

3.4.4.2. Háromszög súlypontra illeszkedő, oldallal párhuzamos tengelyre vett másodrendű nyomatéka

Tudjuk, hogy a háromszög súlypontja a csúcs és a szemközti oldal harmadánál van, az oldalhoz közelebb. Ekkor a háromszög a oldallal párhuzamos súlyponti tengelye (szintén a háromszögek hasonlósága miatt) a magasság harmadolópontján megy át (15. ábra).



15. ábra

Az x tengelynek a magasság harmadával való eltolásával természetesen megváltozik a (92) alakja:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{m - \frac{m}{3} - y} = \frac{m}{\frac{2m}{3} - y} \tag{95}$$

amelyből b-t kifejezve és (91)-be behelyettesítve dA-ra kapjuk:

$$\mathrm{d}A = \frac{a\left(\frac{2m}{3} - y\right)}{m}\mathrm{d}y \tag{96}$$

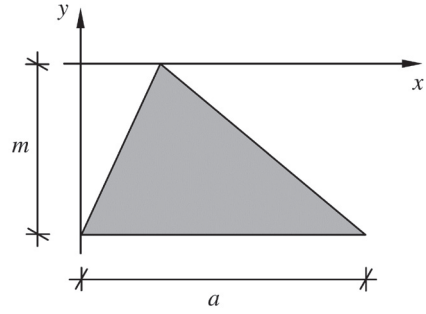
Ezzel a helyettesítéssel elvégezve a (68) integrálját $-m/3$ és $2m/3$ között, megkapjuk a súlyponti tengelyre vett másodrendű nyomatékot:

$$I_{\Delta,\mathrm{sp},x} = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_{-\frac{m}{3}}^{\frac{2m}{3}} y^2\,\frac{a\left(\frac{2m}{3} - y\right)}{m}\mathrm{d}y = \frac{a\,m^3}{36} \tag{97}$$

$$I_{\Delta,\mathrm{sp},x} = \frac{a\,m^3}{36} \tag{98}$$

3.4.4.3. Háromszög csúcsra illeszkedő, szemközti oldallal párhuzamos tengelyre vett másodrendű nyomatéka

Számítsuk ki egy háromszög másodrendű nyomatékát arra a tengelyre, amely párhuzamos egy oldalával, és átmegy az azzal az oldallal szemközti csúcson (16. ábra).



16. ábra

A hasonló háromszögek oldalainak arányát ebben az esetben az

(99) $$\frac{a}{b} = \frac{m}{-y}$$

aránypárral tudjuk felírni, amelyből b-t kifejezve a (91) a következő alakot veszi fel:

(100) $$\mathrm{d}A = \frac{-a\,y}{m}\,\mathrm{d}y$$

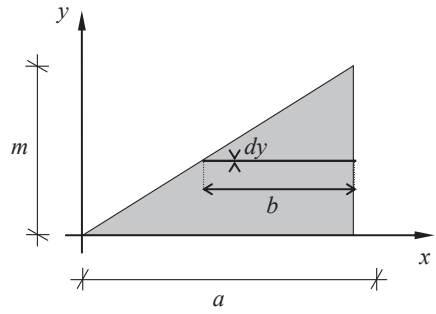
Ezt a (68)-ba behelyettesítve és az integrált $-m$ és 0 között kiértékelve megkapjuk a háromszög csúcsra illeszkedő, szemközti oldallal párhuzamos tengelyre vett másodrendű nyomatékát:

(101) $$I_{\nabla,x} = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_{-m}^{0} y^2\,\frac{-a\,y}{m}\,\mathrm{d}y = \frac{a m^3}{4}$$

(102) $$I_{\nabla,x} = \frac{a m^3}{4}$$

3.4.4.4. Derékszögű háromszög centrifugális másodrendű nyomatéka

Számítsuk ki a 17. ábrán látható derékszögű háromszög centrifugális másodrendű nyomatékát a megadott tengelyekre.



17. ábra

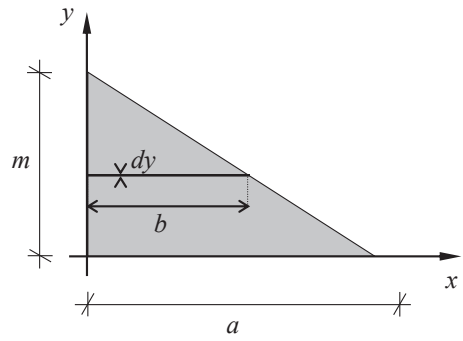
Az x tengellyel párhuzamos, dy magasságú és b szélességű dA felületelem esetében a b paraméter kifejezése megegyezik a (92) összefüggéssel. Felírva a centrifugális másodrendű nyomaték definícióját a megfelelő integrálási határokkal:

$$I_{\triangleleft,xy} = \int_0^m \int_{a-b}^{a} x\, y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^m \int_{\frac{ay}{m}}^{a} x\, y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^m y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{ay}{m}}^{a} \mathrm{d}y = \int_0^m y\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2 y^2}{2m^2}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^m \left(\frac{a^2}{2}\, y - \frac{a^2}{2m^2}\, y^3\right)\mathrm{d}y = \frac{a^2}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^m - \frac{a^2}{2m^2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^m = \frac{a^2}{2}\,\frac{m^2}{2} - \frac{a^2}{2m^2}\,\frac{m^4}{4}$$

(103)
$$I_{\triangleleft,xy} = \frac{a^2 m^2}{8}$$

A 18. ábrán látható derékszögű háromszög megadott tengelyekre vett centrifugális másodrendű nyomatéka esetében csak az x szerinti integrálás határai változnak meg az előzőekhez képest.



18. ábra

$$I_{\triangleleft,xy} = \int_0^m \int_0^b x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^m \int_0^{a-\frac{a}{m}y} x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^m y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{a-\frac{a}{m}y}\mathrm{d}y = \int_0^m y\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2 y}{m} + \frac{a^2 y^2}{2m^2}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^m \left(\frac{a^2}{2}y - \frac{a^2}{m}y^2 + \frac{a^2}{2m^2}y^3\right)\mathrm{d}y = \frac{a^2}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^m - \frac{a^2}{m}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^m + \frac{a^2}{2m^2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^m =$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{m^2}{2} - \frac{a^2}{m}\frac{m^3}{3} + \frac{a^2}{2m^2}\frac{m^4}{4} = \frac{a^2 m^2}{24}$$

(104)
$$I_{\triangleright,xy} = \frac{a^2 m^2}{24}$$

3.5. A Steiner-tétel vagy párhuzamos tengelyek tétele

A gyakorlatban sokszor olyan tengelyekre vett másodrendű nyomatékokra van szükség, amelyek nem találhatóak meg táblázatokban. Ekkor azonban nem szükséges az adott síkidomot a kérdéses tengelyhez viszonyítva paraméterezni és újra elvégezni az integrálást. A Steiner-tétel segítségével bármely tengelyre ki tudjuk számítani egy adott síkidom másodrendű nyomatékát, ha egy vele párhuzamos tengelyre már ismerjük azt, és a két tengely távolsága és a síkidom felülete is ismert.

Legyen a síkidom másodrendű nyomatéka a súlypontján átmenő x tengelyre ismert I_x. Legyen annak a tengelynek, amelyre a másodrendű nyomatékot keressük, a távolsága az x tengelytől az y tengely mentén t. Ekkor

a súlyponti koordináta-rendszer szerinti y koordináták a másik tengelyhez képest $y + t$ alakban transzformálódnak.

Ha a súlyponti tengelyre vett másodrendű nyomatékot a (68) alapján az

$$I_{x,\mathrm{sp}} = \int_A y^2 \,\mathrm{d}A$$

módon számítjuk, akkor az eltolt tengelyre

$$(105)\quad I'_x = \int_A (y+t)^2 \,\mathrm{d}A = \int_A (y^2 + 2\,y\,t + t^2)\,\mathrm{d}A = \int_A y^2 \,\mathrm{d}A + 2\,t \int_A y\,\mathrm{d}A + t^2 \int_A \mathrm{d}A$$

Az első integrál a súlyponti másodrendű nyomaték. A második integrál egy elsőrendű nyomaték, amely azonban, lévén súlyponti tengelyre vett elsőrendű nyomaték, nulla. A harmadik integrál egyszerűen a síkidom felülete.

$$(106)\qquad I'_x = I_{x,\mathrm{sp}} + S_{x,A} + At^2$$

Ha egy síkidom másodrendű nyomatéka ismert egy súlypontján átmenő tengelyre, akkor bármely másik, ezzel a tengellyel párhuzamos tengelyre megkapjuk a másodrendű nyomatékot egy pozitív szám, a síkidom felületének és a tengelyek távolsága négyzetének a szorzatát hozzáadva.

Mivel a síkidom A felülete pozitív szám, a távolság pedig a négyzeten szerepel, az additív tag is biztosan pozitív. Ez azt jelenti, hogy egy síkidom egymással párhuzamos tengelyekre vett másodrendű nyomatékai közül az a legkisebb, amely a súlyponti tengelyre vonatkozik.

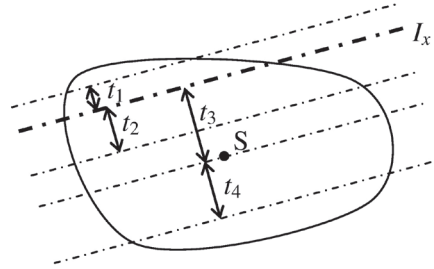
A centrifugális másodrendű nyomaték esetében a képlet az

$$(107)\qquad I_{uv} = I_{xy,\mathrm{sp}} + A\,u\,v$$

alakra módosul, ahol $I_{xy,\mathrm{sp}}$ a súlypontban metsződő x és y tengelyekre vett centrifugális másodrendű nyomaték; az u tengely párhuzamos az x tengellyel, és tőle vett távolsága u; a v tengely párhuzamos az y tengellyel, és tőle vett távolsága v, és I_{uv} az u és v tengelyekre vett centrifugális másodrendű nyomaték.

3.5.1. Alkalmazás tetszőleges tengelyre

Ha egy olyan tengelyre ismerjük az I_x másodrendű nyomatékot, amely nem megy át a súlyponton, akkor is ki tudjuk számítani a másodrendű nyomatékot bármely tengelyre (19. ábra).



19. ábra

Ha a kérdéses tengely az eredeti tengelynek a súlyponttal ellentétes oldalán fekszik a tengelytől t_1 távolságra, egyszerűen hozzáadjuk az At_1^2 tagot I_x-hez, mivel távolodunk a súlyponttól, tehát a másodrendű nyomatéknak nőnie kell.

Ha a kérdéses tengely a súlypont és az eredeti tengely között van (vagy éppen a súlyponti tengellyel esik egybe) a tengelytől t_2 távolságra, akkor levonjuk I_x-ből az At_2^2 tagot, hiszen közeledünk a súlyponthoz, ezért a másodrendű nyomatéknak csökkennie kell. Ha azonban a kérdéses tengely a súlypont ellentétes oldalán fekszik úgy, hogy az eredeti tengely és a súlyponti tengely távolsága t_3, a súlyponti tengely és a kérdéses tengely távolsága pedig t_4, akkor az eredményt két lépésben kaphatjuk meg. Először a súlyponti tengelyre vett másodrendű nyomatékot kell kiszámítani úgy, hogy I_x-ből levonjuk az At_3^2 szorzatot, majd ehhez hozzáadjuk az At_4^2 szorzatot, és ezzel kapjuk meg a kérdéses tengelyre vett másodrendű nyomatékot.

3.5.2. Alkalmazás korábbi eredményekre

A 3.4. alfejezetben levezetett másodrendű nyomatékok közül többet egyszerűbben is megkaphatunk, ha a Steiner-tételt alkalmazzuk. Az *a* és *b* oldalú téglalap *a* oldallal párhuzamos súlyponti tengelyére és az *a* oldalra illeszkedő tengelyére vett másodrendű nyomatékok között [azaz a (78) és a (74) egyenletek között] fennáll az alábbi összefüggés a tengelyek egymástól való *b*/2 távolsága miatt:

$$(108)\quad \frac{ab^3}{3} = I_{\text{téglalap},x} = I_{\text{téglalap},x,\text{sp}} + At^2 = \frac{ab^3}{12} + ab\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{ab^3}{12} + \frac{ab^3}{4}$$

Hasonlóan igaz a Steiner-tétel a (98)-ban felírt, a háromszög súlyponti tengelyére számított másodrendű nyomaték és a tőle $m/3$ távolságra levő oldalra illeszkedő tengelyre számolt (94), valamint $2m/3$ távolságra levő csúcsra illeszkedő tengelyre vett (102) másodrendű nyomaték közötti transzformációra:

$$\frac{a\,m^3}{12} = I_{\Delta,x} = I_{\Delta,\mathrm{sp}} + A\left(\frac{m}{3}\right)^2 = \frac{a\,m^3}{36} + \frac{a\,m}{2}\frac{m^2}{9} \tag{109}$$

$$\frac{a\,m^3}{4} = I_{\nabla,x} = I_{\Delta,\mathrm{sp}} + A\left(\frac{2m}{3}\right)^2 = \frac{a\,m^3}{36} + \frac{a\,m}{2}\frac{4m^2}{9} \tag{110}$$

3.6. Összetett síkidomok másodrendű nyomatéka

Összetett síkidomok esetében azok paraméterezése a másodrendű nyomaték kiszámításához szükséges integrálhoz nagyon hamar elbonyolódik. Éppen ezért azokat nem így, hanem egy sokkal egyszerűbb módon számoljuk.

3.6.1. Összetett síkidomok másodrendű nyomatékának felbontása

Tegyük tehát fel, hogy egy A területű síkidom három másik, egy A_1, egy A_2 és egy A_3 területű síkidomra osztható:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \tag{111}$$

Az egyes területek felírhatók az adott részsíkidom felületén vett, felület szerinti integrállal:

$$\int_A \mathrm{d}A = \int_{A_1} \mathrm{d}A + \int_{A_2} \mathrm{d}A + \int_{A_3} \mathrm{d}A \tag{112}$$

Az egyenlet mindkét oldalát beszorozva y^2-tel (ugyanazzal, hiszen ugyanarra a tengelyre vesszük a másodrendű nyomatékot minden esetben):

$$\int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_{A_1} y^2\,\mathrm{d}A + \int_{A_2} y^2\,\mathrm{d}A + \int_{A_3} y^2\,\mathrm{d}A \tag{113}$$

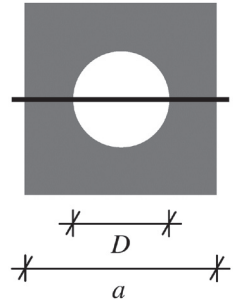
és itt az egyes tagok az egyes síkidomok másodrendű nyomatékaival egyeznek meg:

(114) $$I_{x,A} = I_{x,A1} + I_{x,A2} + I_{x,A3}$$

Ha tehát a síkidom, amelynek adott tengelyre vett másodrendű nyomatékára kíváncsiak vagyunk, felbontható olyan részsíkidomokra, amelyeknek a másodrendű nyomatékait ismerjük ugyanarra a tengelyre, a teljes síkidom ezek összegeként áll elő. A részsíkidomokra általában alkalmazni kell a Steiner-tételt.

3.6.2. A „negatív terület”

Ha egy összetett síkidomban egy lyuk van, sokszor nem egyszerűen nehéz azt véges számú, már ismert másodrendű nyomatékú részsíkidomból felépíteni, hanem geometriailag lehetetlen. Ilyen például egy négyzet, közepén kör alakú lyukkal (20. ábra).



20. ábra

Azonban, hasonlóan az elsőrendű nyomaték ilyen síkidomra történő kiszámításához, itt sem kell a síkidomot paraméterezni, majd az integrálást elvégezni, hogy megkapjuk a másodrendű nyomatékot. Ugyanis úgy is tekinthetünk a lyukra, mint egy negatív területű síkidomra, és ennek (negatív) másodrendű nyomatékát hozzáadva a lyuk nélküli síkidoméhoz, megkapjuk a lyukas síkidom másodrendű nyomatékát.

Ha az egyes síkidomoknak ismerjük az adott tengelyre vett másodrendű nyomatékát, egyszerűen (előjelhelyesen) összeadhatjuk őket. De egy olyan lyuk sem okoz nehézséget, amelynek alakja lefedhető több, de ismert másodrendű nyomatékú síkidommal: ezen kitöltő síkidomok adott tengelyre vett másodrendű nyomatékait adjuk hozzá negatív előjellel a kiindulási,

folytonosnak tekintett síkidomhoz (amelynek másodrendű nyomatéka szintén számolható több részsíkidom másodrendű nyomatékának összegeként).

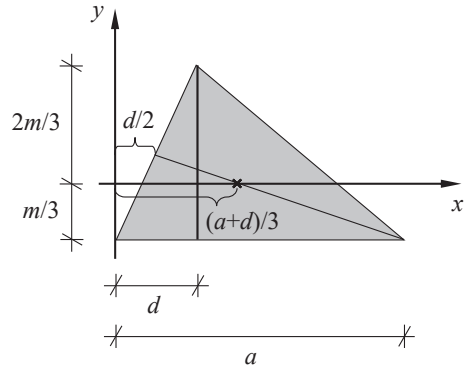
A 20. ábra példájánál mind az *a* oldalú négyzet, mind a *D* átmérőjű körlap másodrendű nyomatéka ismert a (80) és a (87) alapján, ezek megfelelő előjeles összege adja a teljes síkidom másodrendű nyomatékát:

(115) $$I_x = \frac{a^4}{12} - \frac{D^4\pi}{32}$$

3.6.3. Alkalmazás korábbi eredményekre

A most bemutatott eredményeket felhasználhatjuk további másodrendű nyomatékok meghatározásához.

A 15. ábrán látható háromszögnek az *y* tengelyre vett másodrendű nyomatékának meghatározásához felbonthatjuk az általános háromszöget két derékszögű háromszögre a 21. ábrán látható módon az *y* tengellyel párhuzamos magasságvonal segítségével:



21. ábra

A ferde vonal, amely az eredeti háromszög jobb alsó csúcsát köti össze a szemközti oldal felezőpontjával, a háromszög egy súlyvonala, amelynek csúcstól távolabbi harmadolópontjában található a háromszög súlypontja. Mivel a felső csúcs távolsága az *y* tengelytől *d*, a felezőponté *d*/2. Továbbá mivel a súlyvonal *a* oldalra vett merőleges vetülete $a - d/2$, ennek harmada

plusz az előbb meghatározott $d/2$ érték a súlypontnak az y tengelytől vett távolsága:

$$\frac{a-\frac{d}{2}}{3}+\frac{d}{2}=\frac{a}{3}-\frac{d}{6}+\frac{d}{2}=\frac{a}{3}+\frac{d}{3}=\frac{a+d}{3} \tag{116}$$

Ekkor tekinthetünk az eredeti háromszögre úgy is, mint két derékszögű háromszögből álló összetett síkidomra, amelyeknek az y tengellyel párhuzamos súlyponti tengelyeikre vett másodrendű nyomatékait meghatározva és a Steiner-tétel segítségével eltolva az y tengelybe, majd összeadva a következő eredményt kapjuk:

$$I_{\Delta,y}=\frac{m(a-d)^3}{36}+\frac{m(a-d)}{2}\left(\frac{a-d}{3}+d\right)^2+\frac{m\,d^3}{36}+\frac{m\,d}{2}\left(\frac{2\,d}{3}\right)^2$$

$$I_{\Delta,y}=\frac{a^3 m}{4}-\frac{a^2 m\,d}{4}+\frac{a\,m\,d^2}{12}=\frac{a\,m}{12}\left(3a^2-3a\,d+d^2\right) \tag{117}$$

Innen már csak egy lépés az y tengellyel párhuzamos súlyponti tengelyre vett másodrendű nyomaték meghatározása, hiszen csak a Steiner-tételt kell alkalmazni ismét a (116) egyenletben meghatározott távolság felhasználásával, figyelve arra, hogy most közeledünk a súlyponti tengelyhez, a változás tehát negatív:

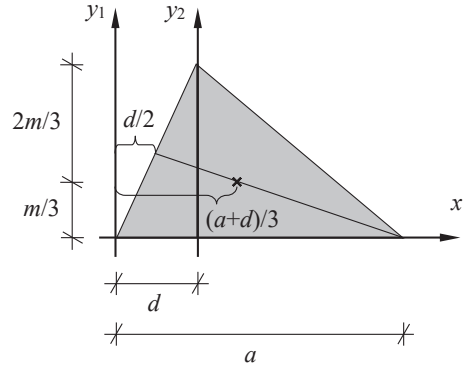
$$I_{\Delta,y,\mathrm{sp}}=\frac{a^3 m}{4}-\frac{a^2 m\,d}{4}+\frac{a\,m\,d^2}{12}-\frac{a\,m}{2}\left(\frac{a+d}{3}\right)^2$$

$$I_{\Delta,y,\mathrm{sp}}=\frac{a^3 m}{36}-\frac{a^2 m\,d}{36}+\frac{a\,m\,d^2}{36}=\frac{a\,m}{36}\left(a^2-a\,d+d^2\right) \tag{118}$$

A (98) és (118) kifejezések ismeretében pedig a (73) összefüggés felhasználásával a háromszög súlypontra vett poláris másodrendű nyomatéka azonnal adódik:

$$I_{\Delta,\mathrm{p,sp}}=\frac{a\,m^3}{36}+\frac{a^3 m}{36}-\frac{a^2 m\,d}{36}+\frac{a\,m\,d^2}{36}=\frac{a\,m}{36}\left(m^2+a^2-a\,d+d^2\right) \tag{119}$$

A (103)–(104) eredmények és a Steiner-tétel segítségével megadható egy általános háromszög (22. ábra) súlyponti centrifugális másodrendű nyomatéka.



22. ábra

$$I_{\Delta,xy,\mathrm{sp}} = \frac{d^2 m^2}{8} - \frac{d}{2}\frac{m}{3}\frac{a+d}{3} + \frac{(a-d)^2 m^2}{24} - \frac{(a-d)m}{2}\frac{m}{3}\left(\frac{a+d}{3} - d\right)$$

(120) $$I_{\Delta,xy,\mathrm{sp}} = \frac{a\,m^2}{72}(2d - a)$$

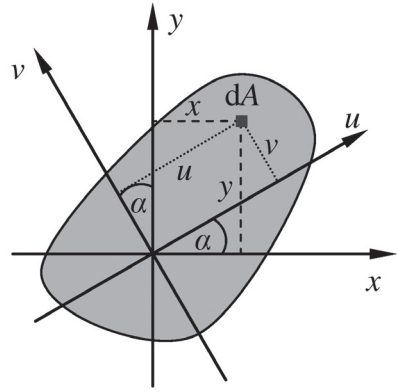
Az első tag a (103) összefüggés alapján a b alapú derékszögű háromszögnek az x és y_1 tengelyekre vett centrifugális másodrendű nyomatéka, a második tag a hozzá tartozó Steiner-tag, a harmadik tag a (104) összefüggés alapján az (a–b) alapú derékszögű háromszögnek az x és y_2 tengelyekre vett centrifugális másodrendű nyomatéka, a negyedik tag pedig a hozzá tartozó Steiner-tag.

3.7. Főtengelyek, fő-másodrendű nyomatékok

Egy síkidom végtelen sok tengelyére számíthatjuk ki annak másodrendű nyomatékát. Ezek között azonban vannak kitüntetett jelentőséggel bíróak aszerint, hogy bizonyos speciális pontokon mennek-e át, vagy hogy milyen a síkidom fő irányaihoz képesti pozíciójuk.

3.7.1. A másodrendű nyomaték transzformációja forgatás hatására

Tegyük fel, hogy ismerjük egy síkidom két, egymásra merőleges x és y tengelyre vett centrifugális másodrendű nyomatékának értékét, és a két tengelyre külön-külön vett másodrendű nyomatékot, azaz I_{xy}-t, I_x-et és I_y-t. Hogyan számíthatók ki bármely, az x és y tengelyek metszéspontján átmenő, egymásra merőleges u és v tengelyekre az I_u, I_v és I_{uv} értékek I_x, I_y és I_{xy} segítségével, ha az x és az u, valamint az y és a v tengelyek által közrezárt szög α (23. ábra)?

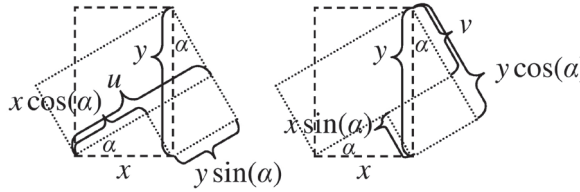


23. ábra

Egy dA felületelem koordinátája az elforgatott koordináta-rendszerben kifejezhető az eredeti koordináták és az elforgatás szögének segítségével (24. ábra):

(121) $$u = x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha)$$

(122) $$v = y\cos(\alpha) - x\sin(\alpha)$$



24. ábra

Felírva az *u* tengelyre vett másodrendű nyomatékot és behelyettesítve (121)-et:

(123) $$I_u = \int_A v^2 \,\mathrm{d}A = \int_A \left[y\cos(\alpha) - x\sin(\alpha)\right]^2 \,\mathrm{d}A =$$

$$= \int_A y^2 \cos^2(\alpha)\mathrm{d}A - \int_A 2\,x\,y\sin(\alpha)\cos(\alpha)\mathrm{d}A + \int_A x^2 \sin^2(\alpha)\mathrm{d}A =$$

$$= I_x \cos^2(\alpha) - I_{xy}\,2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + I_y \sin^2(\alpha)$$

Felhasználva a

(124) $$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha) \text{ és } \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$$

összefüggéseket, kapjuk:

(125) $$I_u = \frac{I_x}{2} + \frac{I_x}{2}\cos(2\alpha) - I_{xy}\sin(2\alpha) + \frac{I_y}{2} - \frac{I_y}{2}\cos(2\alpha) =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\alpha) - I_{xy}\sin(2\alpha)$$

Hasonlóan kapjuk:

(126) $$I_v = I_y \cos^2(\alpha) + I_{xy}\,2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + I_x \sin^2(\alpha) =$$

$$= \frac{I_y}{2} + \frac{I_y}{2}\cos(2\alpha) + I_{xy}\sin(2\alpha) + \frac{I_x}{2} - \frac{I_x}{2}\cos(2\alpha) =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\alpha) + I_{xy}\sin(2\alpha)$$

A centrifugális másodrendű nyomaték az elforgatott koordináta-rendszerben az eredeti koordinátákkal kifejezve:

(127) $$I_{uv} = \int_A u\,v\,\mathrm{d}A = \int_A \left[x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha)\right]\left[y\cos(\alpha) - x\sin(\alpha)\right]\mathrm{d}A =$$

$$= \int_A x\,y\cos^2(\alpha)\mathrm{d}A - \int_A x^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\mathrm{d}A + \int_A y^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\mathrm{d}A - \int_A x\,y\sin^2(\alpha)\mathrm{d}A =$$

$$= I_{xy}\cos^2(\alpha) - I_y\sin(\alpha)\cos(\alpha) + I_x\sin(\alpha)\cos(\alpha) - I_{xy}\sin^2(\alpha) =$$

$$= I_{xy}\cos(2\alpha) + \frac{I_x - I_y}{2}\sin(2\alpha)$$

Összefoglalva:

(128) $$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\alpha) - I_{xy}\sin(2\alpha)$$

(129) $$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\alpha) + I_{xy}\sin(2\alpha)$$

(130) $$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin(2\alpha) + I_{xy}\cos(2\alpha)$$

3.7.2. A főtengelyek

A (130) alapján számolható I_{uv} centrifugális másodrendű nyomaték lehet pozitív, negatív és nulla is (lásd 3.3.2. alfejezet). Határozzuk meg azt az α_0 szöget, amelynél éppen az $I_{uv} = 0$ egyenlőség áll fenn, azaz oldjuk meg az

(131) $$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin(2\alpha_0) + I_{xy}\cos(2\alpha_0) \overset{!}{=} 0$$

egyenletet! Innen

(132) $$\frac{I_x - I_y}{2}\sin(2\alpha_0) = -I_{xy}\cos(2\alpha_0)$$

(133) $$\frac{\sin(2\alpha_0)}{\cos(2\alpha_0)} = \mathrm{tg}(2\alpha_0) = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Ennek az egyenletnek α_0-ra két, egymástól $\pi / 2$-vel különböző megoldása van.

Kérdés még, hogy az I_u és az I_v függvényeknek hol van szélsőértéke? Ennek meghatározása az I_u és az I_v függvények deriváltfüggvényei zérushelyeinek a megkeresését jelenti, azaz deriváljuk (128)-at és (129)-et α szerint, és a deriváltfüggvényt tegyük egyenlővé 0-val. Azt kapjuk, hogy a

$$\frac{\mathrm{d}I_u}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\mathrm{d}I_v}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \tag{134}$$

egyenletek egy (–1)-szeres szorzótól eltekintve azonosak:

$$\frac{\mathrm{d}I_u}{\mathrm{d}\alpha} = -\left(I_x - I_y\right)\sin(2\alpha) - 2I_{xy}\cos(2\alpha) = 0 \tag{135}$$

$$\frac{\mathrm{d}I_u}{\mathrm{d}\alpha} = -\left(I_x - I_y\right)\sin(2\alpha) - 2I_{xy}\cos(2\alpha) = 0 \tag{136}$$

így elegendő az egyik egyenletet megoldani. A szögfüggvényeket az egyik oldalra, a másodrendű nyomatékokat a másik oldalra rendezve a (133)-mal azonos alakú megoldást kapunk. Ez azt jelenti, hogy ahol a centrifugális másodrendű nyomaték nulla, ott az egyik tengelyre vett másodrendű nyomatéknak minimuma, a másiknak pedig (az ellentétes előjelek miatt) maximuma van.

Az adott ponton átmenő végtelen sok tengely közül ezt a kettőt, amelyekre a másodrendű nyomatéknak szélsőértéke van, az adott ponthoz tartozó főtengelyeknek *(principal axis)* nevezzük.

Egy síkidom szimmetriatengelye mindig főtengely, és az összes, szimmetriatengelyre merőleges tengely is főtengely.

3.7.3. A fő-másodrendű nyomatékok

Határozzuk meg a főtengelyekre vett másodrendű nyomatékok értékét is! A (128) egyenletet

$$I_u - \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\alpha) - I_{xy}\sin(2\alpha) \tag{137}$$

alakra rendezve, majd négyzetre emelve és hozzáadva a (130) egyenlet négyzetét kapjuk:

$$(138)\quad \left[I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right]^2 + I_{uv}^2 = \left[\frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\alpha) - I_{xy}\sin(2\alpha)\right]^2 + \left[\frac{I_x - I_y}{2}\sin(2\alpha) + I_{xy}\cos(2\alpha)\right]^2$$

Mivel $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, a jobb oldalon elvégezve a négyzetre emelést és kiemelve a megfelelő tagokat, az az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$(139)\quad \left[I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right]^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

A bal oldalon a négyzetre emelést elvégezve (és mivel tudjuk, hogy a főtengelyekre $I_{uv} = 0$, ezért ezt a tagot elhagyva) és az egyenletet nullára rendezve:

$$(140)\quad I_u^2 - I_u\left(I_x + I_y\right) + \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 - \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 - I_{xy}^2 = 0$$

A két összetett négyzetes tagban elvégezve a négyzetre emelést, az összevonások után kapjuk:

$$(141)\quad I_u^2 - I_u\left(I_x + I_y\right) + I_x I_y - I_{xy}^2 = 0$$

Ez egy másodfokú egyenlet I_u-ra, így az a = 1, b = – $(I_x + I_y)$ és c = $I_x I_y - I_{xy}^2$ együtthatókat behelyettesítve a másodfokú egyenlet megoldóképletébe I_u-ra kapunk két megoldást:

$$(142)\quad I_{u,1,2} = \frac{\left(I_x + I_y\right) \pm \sqrt{\left(I_x + I_y\right)^2 - 4\left(I_x I_y - I_{xy}^2\right)}}{2} =$$

$$= \frac{\left(I_x + I_y\right) \pm \sqrt{I_x^2 + 2I_x I_y + I_y^2 - 4I_x I_y + 4I_{xy}^2}}{2} =$$

$$= \frac{\left(I_x + I_y\right) \pm \sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}}{2}$$

A számolásban a (128) egyenlet helyett a (129) egyenletet használva ugyanezt a két eredményt kapjuk I_v-re, mivel az eltérő előjelek a megfelelő helyeken ugyanolyan előjelű szorzatot adnak eredményül:

$$(143)\quad \left[I_v - \frac{I_x + I_y}{2}\right]^2 + I_{uv}^2 = \left[\frac{I_x - I_y}{2}\cos(2\alpha) + I_{xy}\sin(2\alpha)\right]^2 + \left[\frac{I_x - I_y}{2}\sin(2\alpha) + I_{xy}\cos(2\alpha)\right]^2$$

Mivel $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, a jobb oldalon elvégezve a négyzetre emelést és kiemelve a megfelelő tagokat, az az alábbi alakra egyszerűsödik:

(144) $$\left[I_u - \frac{I_x + I_y}{2}\right]^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$$

ami megegyezik a (139) egyenlettel, innentől a levezetés megegyezik a (140)–(142) lépésekkel. A két független megoldás tehát

(145) $$I_1 = I_{\max} = \frac{(I_x + I_y) + \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}{2}$$

(146) $$I_2 = I_{\min} = \frac{(I_x + I_y) - \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}{2}$$

amelyeket az adott ponton átmenő főtengelyekhez tartozó fő-másodrendű nyomatékoknak *(principal moment of inertia)* nevezünk, és I_1-gyel és I_2-vel jelölünk.

3.7.4. Másodrendű nyomaték tetszőleges tengelyre

Ha egy síkidomnak ismerjük a főtengelyeit és az ezekre vett I_1 és I_2 fő-másodrendű nyomatékokat, akkor az I_1-hez tartozó tengellyel φ szöget bezáró *a* tengelyre (és a rá merőleges, azaz az I_2-höz tartozó főtengellyel szintén φ szöget bezáró *b* tengelyre) vett másodrendű nyomaték értéke is számolható. A (128) és a (129) egyenletekbe I_x helyére I_1-et, I_y helyére I_2-t helyettesítünk (és feltételezzük, hogy a főtengelyek legalább egyike egybeesik a síkidom valamelyik szimmetriatengelyével, ezért $I_{xy} = I_{12} = 0$):

(147) $$I_a = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2}\cos(2\varphi)$$

(148) $$I_b = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2}\cos(2\varphi)$$

A jobb oldalak első tagját beszorozzuk $1 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)$-vel, a második tagokra pedig alkalmazzuk a $\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)$ összefüggést:

(149) $$I_a = \frac{I_1 + I_2}{2}\cos^2(\varphi) + \frac{I_1 + I_2}{2}\sin^2(\varphi) + \frac{I_1 - I_2}{2}\cos^2(\varphi) - \frac{I_1 - I_2}{2}\sin^2(\varphi)$$

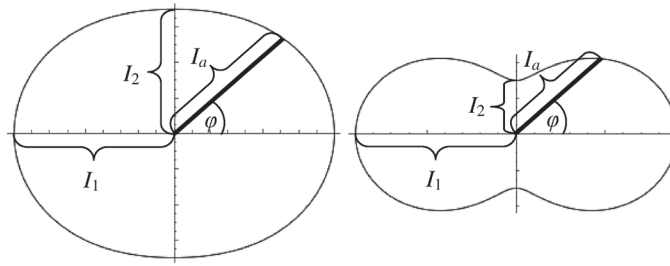
(150) $$I_b = \frac{I_1 + I_2}{2}\cos^2(\varphi) + \frac{I_1 + I_2}{2}\sin^2(\varphi) - \frac{I_1 - I_2}{2}\cos^2(\varphi) + \frac{I_1 - I_2}{2}\sin^2(\varphi)$$

A megfelelő tagokból $\cos^2(\varphi)$-t és $\sin^2(\varphi)$-t kiemelve kapjuk a főtengelyekkel φ szöget bezáró tengelyekre vett másodrendű nyomatékok értékeit a fő--másodrendű nyomatékokkal kifejezve:

(151) $$I_a = I_1 \cos^2(\varphi) + I_2 \sin^2(\varphi)$$

(152) $$I_b = I_2 \cos^2(\varphi) + I_1 \sin^2(\varphi)$$

Az I_1 és az I_2 egymáshoz képesti arányától függően változik a másodrendű nyomaték nagysága a φ szög függvényében (25. ábra).



25. ábra

Tudjuk, hogy az egymással párhuzamos tengelyek közül mindig arra lesz a másodrendű nyomaték a legkisebb, amelyik a síkidom súlypontján megy át (lásd 3.5. alfejezet), a súlyponton átmenő tengelyekre vett másodrendű nyomatékok közül pedig az I_2-nek megfelelő főtengelyre vett lesz a minimális. Ez az adott síkidomon átmenő összes tengelyre vett másodrendű nyomatékok közül a legkisebb.

3.8. A másodrendű nyomaték vektoros alakja

A következőkben a másodrendű nyomaték egy gyakran használt reprezentációját ismerjük meg, és mutatjuk be ekvivalenciáját az eddigi skalárreprezentációval egy korábban már levezetett probléma ezen módszerrel történő megoldásán keresztül.

3.8.1. A másodrendű nyomatéki mátrix

A másodrendű nyomaték tetszőleges tengellyel párhuzamos irányban való meghatározásához célszerű definiálni az úgynevezett másodrendű nyomatéki mátrixot. Ennek a mátrixnak a diagonális elemei az *xy* koordináta-rendszerben az *x* és az *y* tengelyre vett másodrendű nyomatékok, az offdiagonális elemek pedig a megfelelő centrifugális másodrendű nyomatékok (–1)-szeresei:

(153) $$\mathbf{I_0} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix}$$

Három dimenzióra hasonlóan értelmezhető a másodrendű nyomatéki mátrix, jobbsodrású koordináta-rendszert feltételezve:

(154) $$\mathbf{I_0} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

Ha ismert egy síkidom adott koordináta-rendszerben vett másodrendű nyomatéka, tetszőleges tengelyre meghatározhatjuk a másodrendű nyomatékot. Ehhez ismerni kell egy, a kérdéses *a* tengellyel párhuzamos egységvektornak, $\mathbf{e}_a$-nak az (*x*, *y*) koordináta-rendszerbeli reprezentációját. Képezve az

(155) $$I_a = \mathbf{e}_a \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_a$$

szorzatot, az *a* tengely irányú másodrendű nyomatékot kapjuk meg, míg az $\mathbf{e}_a$ egységvektorra merőleges $\mathbf{e}_b$ egységvektor felhasználásával a centrifugális másodrendű nyomaték (–1)-szeresét kaphatjuk meg:

(156) $$-I_{ab} = \mathbf{e}_a \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_b = \mathbf{e}_b \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_a = -I_{ba}$$

Itt kihasználtuk az $\mathbf{I}_0$ mátrix szimmetriáját, hogy megmutassuk, hogy merőleges tengelyekhez tartozó másodrendű nyomatékvektorok egymás tengelyére vett vetületei egyenlőek. Megjegyezzük, de nem bizonyítjuk, hogy ez az állítás nem merőleges tengelyekre is igaz.

3.8.2. A másodrendű nyomaték vektorreprezentációja

A fenti számítások során közbenső lépésként, amikor a másodrendű nyomatéki mátrixot megszoroztuk az *a* irányú egységvektorral (mindegy, hogy balról vagy jobbról), egy vektort kaptunk:

(157) $$\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_a$$

Ezt a vektort az *a* tengelyhez tartozó másodrendűnyomaték-vektornak nevezzük. Mivel az eredeti (*x*, *y*) koordináta-rendszerünkben az *x* és az *y* irányú egységvektorok

(158) $$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ezen tengelyek másodrendűnyomaték-vektorai:

(159) $$\mathbf{I}_x = \begin{bmatrix} I_x \\ -I_{yx} \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{I}_y = \begin{bmatrix} -I_{xy} \\ I_y \end{bmatrix}$$

Az előző alfejezet alapján már tudjuk, hogy létezik egy olyan tengelypár, amelyekhez tartozó centrifugális másodrendű nyomaték nulla. Ezeket nevezztük főtengelyeknek és jelöltük *u*-val és *v*-vel, a hozzájuk tartozó másodrendű nyomatékokat pedig I_u-val és I_v-vel. Igaz tehát, hogy $I_{uv} = I_{vu} = 0$. Ez vektorosan azt jelenti, hogy az *u* tengelyhez tartozó másodrendűnyomaték-vektornak a *v* tengelyre vett merőleges vetülete nulla, és fordítva:

(160) $$-I_{uv} = \mathbf{e}_u \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_u \mathbf{I}_v = \mathbf{e}_v \mathbf{I}_u = \mathbf{e}_v \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_u = -I_{vu} = 0$$

Képezzük formálisan az $\mathbf{I}_u$ vektort!

(161) $$\mathbf{I}_u = \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_u$$

Az egységelemmel bármikor lehet szorozni, így mivel igaz, hogy $\mathbf{e}_u^2 = \mathbf{e}_u \mathbf{e}_u = 1$, továbbá mivel a vektor skalárral való szorzásának művelete kommutatív, azaz $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{v} \lambda$, ezért

(162) $$\mathbf{I}_u = \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_u = 1 \cdot \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_u \mathbf{e}_u \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_u = \mathbf{e}_u \left(\mathbf{e}_u \mathbf{I}_0 \mathbf{e}_u \right) = \mathbf{e}_u I_u = I_u \mathbf{e}_u$$

Felírva csak a második és az utolsó tag egyenlőségét, majd nullára rendezve és mátrixegyenletként felírva az egyenletet:

(163) $$\mathbf{I}_0\mathbf{e}_u - I_u\mathbf{e}_u = \mathbf{0}$$

(164) $$\mathbf{I}_0\mathbf{e}_u - \mathbf{E}I_u\mathbf{e}_u = (\mathbf{I}_0 - \mathbf{E}I_u)\mathbf{e}_u = \mathbf{0}$$

(165) $$\begin{bmatrix} I_x - I_u & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y - I_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_u) \\ \sin(\varphi_u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ahol φ_u az u tengelynek az x tengellyel bezárt szöge, lásd még (121). A megoldások a

(166) $$\begin{vmatrix} I_x - I_u & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y - I_u \end{vmatrix} = (I_x - I_u)(I_y - I_u) - I_{xy}^2 = 0$$

egyenlet megoldásával határozhatók meg, ami egy másodfokú egyenlet I_u-ra:

$$I_u^2 - I_x I_u - I_y I_u + I_x I_y - I_{xy}^2 = 0$$

(167) $$I_u^2 - (I_x + I_y) I_u + (I_x I_y - I_{xy}^2) = 0$$

amelynek a (142) a megoldása:

$$I_u = \frac{(I_x + I_y) \pm \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}{2}$$

Ezzel a vektoros formalizmus használatával is megkaptuk a korábban levezetett eredményünket.

3.9. Az inerciasugár és a tehetetlenségi ellipszis

A tengelyre vett elsőrendű nyomaték meghatározásánál láttuk, hogy a síkidom anyagát a súlypontba „sűrítve”, azaz a súlypont tengelytől való távolságát a síkidom területével beszorozva ugyanazt az értéket kapjuk, mint ha elvégeznénk az integrálást a síkidom teljes felületére, azaz

(168) $$S_{x,A} = \int_A y \, \mathrm{d}A = A\, y_{\mathrm{sp}}$$

A másodrendű nyomaték számításánál is hasonló a helyzet: a síkidom teljes „anyagát” az x tengelytől i_y távolságra egy vonalba (vagy akár egyetlen

pontba) „sűrítve” a teljes felületen vett integrálással kapható eredménnyel azonos eredményre juthatunk. Azaz a keresztmetszet felületének nagyságát az i_y mennyiség négyzetével szorozva az adott tengelyre vett másodrendű nyomatékot kapjuk:

(169) $$I_x = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A = i_y^2 A$$

Az i_y távolságot inerciasugárnak (*radius of gyration* vagy *gyradius*) nevezzük, és kiszámításának módja az adott tengelyre vett másodrendű nyomaték ismeretében tehát

(170) $$\left| i_y \right| = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

A négyzetre emelésből következik, hogy egy adott tengelynek mindkét oldalán i_y távolságra van egy-egy olyan tengely, amelyre a (169)-et felírva, a másodrendű nyomatékot kapjuk.

Mivel az egy síkidom adott pontján átmenő tengelyekre számolt másodrendű nyomatékoknak a főtengelyeknél van szélsőértéke (két maximuma és két minimuma), ezért az inerciasugaraknak is itt lesz két-két szélsőértéke, hiszen a kiszámításukkor csak az állandó A felülettel osztjuk le a másodrendű nyomatékot.

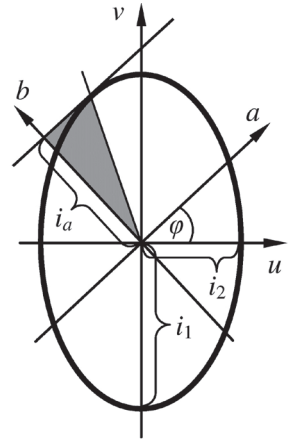
Jelöljünk ki egy síkidomon egy P pontot, majd határozzuk meg az összes, ezen a ponton átmenő tengelyre az inerciasugarat. Ez megfelel annak, mintha a (151) és (152) egyenletek mindkét oldalát leosztanánk az A területtel, és gyököt vonnánk mindkét oldalból (mivel a két egyenlet megkülönböztetése csak a jelölésben nyilvánul meg, azaz ha a két fő-másodrendű nyomatékot fordítva jelölnénk, a másik egyenletet kapnánk, itt csak I_a-ra végezzük el a számolást):

(171) $$i_a = \sqrt{i_1^2 \cos^2(\varphi) + i_2^2 \sin^2(\varphi)}$$

ahol $i_1 = \sqrt{(I_1/A)}$ és $i_2 = \sqrt{(I_2/A)}$.

A (151)–(152) egyenletek felhasználásával impliciten továbbra is feltettük, hogy legalább az egyik főtengely egybeesik a síkidom valamely szimmetriatengelyével, azaz hogy $I_{12} = 0$. A (171) egyenlet egy ellipszis érintőegyenese és a középpontja közti távolság szögfüggését írja le (amely csak a főtengelyek irányában egyezik meg az érintési pont és az ellipszis középpontjának

távolságával!). Az érintőegyenesek tehát egy ellipszist határoznak meg (26. ábra), ezt nevezzük tehetetlenségi ellipszisnek *(ellipse of inertia).* Ha az *u* és a *v* tengelyek a síkidom súlypontján mennek át, azaz I_1 és I_2 a súlyponthoz tartozó fő-másodrendű nyomatékok, akkor centrális tehetetlenségi ellipszisről beszélünk.



26. ábra

A 26. ábrán jelölt (azaz a tehetetlenségi ellipszis középpontja, az érintési pont, valamint az elforgatott koordináta-rendszer *b* tengelye és az érintőegyenes metszéspontja által meghatározott) háromszögről megmutatható, hogy annak *T* területére igaz az

(172) $$I_{ab} = 2TA$$

összefüggés.

3.10. Méretezés és ellenőrzés hajlításra

Az eddig elmondottak alapján gyakorlatilag bármilyen keresztmetszet bármely tengelyére meg tudjuk határozni a másodrendű nyomatékot. Például kereskedelmi forgalomban kapható, különféle szelvényű idomacélok esetében ennek vagy a *K* keresztmetszeti tényezőnek az értéke a termékleírásokban, tanúsítványokban is szerepel a főtengelyekre. A Navier-képlet alkalmazásával tehát egy keresztmetszet bármely pontjára meg tudjuk határozni annak

igénybevételét, ha a rúd tiszta hajlításra van terhelve. Ez az eset akkor áll fenn, ha a hajlítónyomaték a teljes rúdon állandó, ami, mint később látni fogjuk, akkor teljesül, ha a rúd nincs nyírásra is igénybe véve (e két terhelés összetett hatásáról a 9.1. alfejezetben lesz szó).

Tovább egyszerűsíti a számolást, ha a rúd igénybevétele úgynevezett egyenes hajlítás, amelyről részletesen az egyirányú összetett igénybevételeknél, a 8.5. fejezetben lesz szó. Ez azt jelenti, hogy a hajlítónyomaték-vektor párhuzamos a keresztmetszet egyik súlyponti főtengelyével, *u*-val vagy *v*-vel. A gyakorlatban ezt a két főtengelyt szokás a koordináta-rendszer *y* és *z* tengelyének felvenni úgy, hogy *x*-szel, a rúd tengelyével jobbsodrású rendszert alkossanak.

Ha a hajlítónyomatéki vektor iránya nem esik egybe egyik súlyponti főtengellyel sem, akkor ferde hajlításról beszélünk.

A méretezés során az ismert igénybevétel és esetleg a meghatározott alakú keresztmetszet alapján határozzuk meg a szerkezet méreteit (és esetleg a legcélszerűbb keresztmetszetet) úgy, hogy a legnagyobb fellépő feszültség ne lépje túl az adott tartóra vonatkozó megengedett feszültséget (σ_{meg}). Ha a tiszta, egyenes hajlításra terhelt rúd anyaga a húzó- és nyomófeszültségekre azonosan viselkedik, akkor a legnagyobb feszültségre méretezünk, amely a rúd tengelyétől $y_{max} = \max(e_1; e_2)$ távolságnál lép fel. A Navier-képletbe azonban nem ezt, hanem a másodrendű nyomaték és y_{max} hányadosát, a keresztmetszeti tényezőt írjuk be, amely, következően az állandó keresztmetszetből, az egész tartóra állandó. A kapott egyenletet átrendezve kapjuk:

$$\sigma_{max} = \frac{M_h}{I} y_{max} = \frac{M_h}{K} \leq \sigma_{meg} \tag{173}$$

$$K \geq \frac{M_h}{\sigma_{meg}} = K_{szüks} \tag{174}$$

ahol $K_{szüks}$ az úgynevezett szükséges keresztmetszeti tényező, amelynél az adott tartó keresztmetszeti tényezője nem lehet kisebb. A tény, hogy nem önmagában a másodrendű nyomaték vagy y_{max} határozza meg egy keresztmetszet alkalmasságát, hanem a kettő hányadosa, bizonyos mértékű szabadságot ad a megfelelő keresztmetszet kiválasztásában.

Ellenőrzéskor azt vizsgáljuk, hogy a szerkezet elbír-e egy adott terhelést. Ekkor mind a terhelő hajlítónyomaték, mind a tartó paraméterei ismertek, így a Navier-képlet alapján számított σ_{max}-ról csak azt kell megállapítanunk, hogy kisebb-e a megengedett feszültségnél.

(175) $$\sigma_{\max} = \frac{M_{\mathrm{h}}}{I} y_{\max} = \frac{M_{\mathrm{h}}}{K} \overset{?}{\leq} \sigma_{\mathrm{meg}}$$

Ha igen, az aktuális paraméterek megfelelőek, a tartó elbírja a terhelést, de ha nem, akkor újra kell a szerkezetet tervezni.

3.11. A rugalmas szál differenciálegyenlete

Az (56) kifejezés alapján a tiszta hajlításra terhelt tartó görbületi sugara állandó (vagyis a tartó alakja körív), és fordítottan arányos a hajlítónyomatékkal, az arányossági tényező pedig a hajlítómerevség:

$$\frac{M}{I\,E} = \frac{1}{R}$$

Ha azonban a hajlítónyomaték nem állandó a teljes tartón, hanem egy $M(x)$ függvény szerint változik, akkor a görbületi sugár is keresztmetszetről keresztmetszetre változik. Legyen y a tartónak a tengelyére merőleges elmozdulása az igénybevétel hatására. Az $y(x)$ függvénnyel leírható alakú síkgörbe görbületi sugara matematikailag az

(176) $$\frac{1}{R(x)} = \pm \frac{y''(x)}{\left(1 + y'^2(x)\right)^{3/2}}$$

függvényalakot követi. Mivel a görbületi sugárra általában igaz, hogy $R \ll \ell$, ezért az $y(x)$ görbének az $y'(x)$ meredeksége már eleve kicsi, ennek négyzete pedig már másodrendűen kicsi, így elhanyagolhatjuk. Ezzel a (176) egyenlet jobb oldalának nevezője egységgé válik, és az egyenletet átrendezve kapjuk:

(177) $$R\,y''(x) = \pm 1$$

Ide beírva az (56) reciprokát és átszorozva a hajlítónyomatékkal:

(178) $$I\,E\,y''(x) = \pm M(x)$$

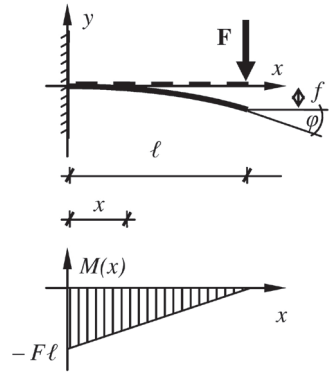
Matematikailag akkor tekintjük a görbületet pozitívnak, ha a görbe a gravitációs erővel ellentétes irányú y tengely pozitív irányából nézve konkáv. Ez a helyzet akkor áll elő, ha a hajlítónyomaték negatív. Így a (178) alakja

(179) $$I\,E\,y''(x) = -M(x)$$

lesz, amelyet a rugalmas szál differenciálegyenletének nevezünk. Az egyenlet integrálással közvetlenül megoldható. Az x tengely mentén az integrálást annyi részletben kell elvégezni, ahány szakaszán a tartónak változik a terhelés vagy a keresztmetszet.

3.11.1. Szabad végén koncentrált erővel terhelt befogott tartó

Ha az egyik végén befogott tartóra a szabad végén egy koncentrált erővel hatunk, a hajlítónyomaték egyenletesen fog változni a tartó tengelye mentén 0-tól $F\ell$-ig, ahogyan azt a statika tárgykörénél már láttuk (27. ábra).



27. ábra

Az igénybevételi ábrából leolvasható, hogy az $M(x)$ függvény egy egyenes, amelynek zérushelye ℓ-nél van, tengelymetszete $-F\ell$, így föl tudjuk írni az egyenletét is:

(180) $$M(x) = F(x - \ell)$$

Ebből a (179) egyenlet alapján már felírható a rugalmas szál differenciálegyenlete:

(181) $$I\,E\,y''(x) = -M(x) = F(\ell - x) = F\,\ell - F\,x$$

Kétszer integrálva mindkétszer megjelenik egy-egy integrálási konstans.

(182) $$I\,E\,y'(x) = F\,\ell\,x - F\frac{x^2}{2} + \mathrm{C}_1$$

(183) $$I\,E\,y(x) = F\,\ell\,\frac{x^2}{2} - F\,\frac{x^3}{6} + \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2$$

A C_1 és C_2 állandókat a határfeltételek segítségével tudjuk meghatározni. A határfeltételek azok az x, $y(x)$ számpárok, amelyekről biztosan tudjuk, hogy a függvény felveszi, így konkrét értéküket a (183)-ba beírva azt ki kell elégíteniük. Jelen esetben az egyik ilyen határfeltétel abból következik, hogy mivel a tartó be van fogva az egyik végén, ott nem is tud elmozdulni. Mivel ez az $x = 0$ helyen van, így itt az y érték is 0 lesz:

(184) $$y(0) = 0$$

Ezt beírva a (183)-ba kapjuk:

(185) $$I\,E\,0 = F\,\ell\,\frac{0^2}{2} - F\,\frac{0^3}{6} + \mathrm{C}_1 0 + \mathrm{C}_2$$

ezt rendezve pedig kapjuk az egyik integrálási konstans értékét: $C_2 = 0$.

A másik határfeltétel szintén a befogás tényéből következik. Itt, az $x = 0$ helyen ugyanis a tartó nemcsak elmozdulni nem tud, de elfordulni sem. Éppen ezért jelenik meg egy $-F\ell$ reakció-hajlítónyomaték a befogásnál, hogy az ezt a tartót elforgatni akaró hajlítónyomatékot kompenzálja. A tartó tehát itt nem tud elfordulni, ami azt jelenti, hogy közvetlenül a befogásnál az alakja olyan lesz, mint egy terheletlen tartónak: vízszintes. A befogásnál a tartó alakját leíró függvény pontosan úgy indul, mint akkor indulna, ha a tartón nem lenne külső terhelő erő: nulla meredekséggel. Mivel egy függvény meredekségét annak első deriváltja adja, így a második határfeltételt az

(186) $$y'(0) = 0$$

alakban írhatjuk. Ezeket az értékeket és a C_2-re az előbb kapott értéket behelyettesítve a (182) egyenletbe:

(187) $$I\,E\,0 = F\,\ell\,0 - F\,\frac{0^2}{2} + \mathrm{C}_1$$

amelyet rendezve a C_1 integrálási konstansra kapjuk: $C_1 = 0$. Ezeket a (183)-ba behelyettesítve:

(188) $$I\,E\,y(x) = F\,\ell\,\frac{x^2}{2} - F\,\frac{x^3}{6}$$

amelyet y-ra rendezve megkapjuk a tartó alakját leíró függvényt:

(189) $$y(x)=\frac{F}{2IE}\left[\ell x^2-\frac{x^3}{3}\right]$$

A két konstans konkrét értékét a (182) egyenletbe hasonlóan behelyettesítve és $y'(x)$-re rendezve megkapjuk a tartó egyes keresztmetszeteinek szögelfordulásait az x, azaz a befogási ponttól való távolság függvényében. Itt felhasználjuk, hogy kis szögelfordulásokról van csak szó, azaz $\varphi << 1$, amikor is $\mathrm{tg}(\varphi) \approx \varphi$. Ezért az első derivált, amely a tartót leíró függvény adott pontbeli meredekségét adja meg, ami másként kifejezve az adott keresztmetszet szögelfordulásának tangense, megegyezik magával a szögelfordulással:

(190) $$\varphi \approx \mathrm{tg}(\varphi)=y'(x)=\frac{F}{IE}\left[\ell x-\frac{x^2}{2}\right]$$

A tartó szabad végének lehajlását és szögelfordulását megkapjuk, ha a (189) és (190) egyenletekbe az $x = \ell$ értéket helyettesítjük be:

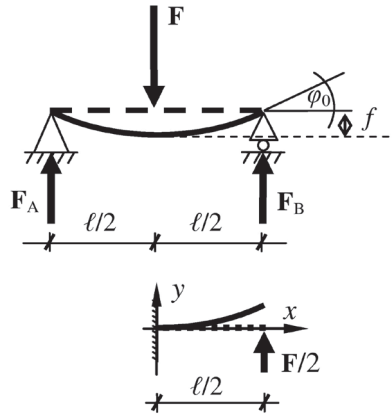
(191) $$f(\ell)=y(\ell)=\frac{F}{2IE}\left[\ell^3-\frac{\ell^3}{3}\right]=\frac{F\ell^3}{3IE}$$

(192) $$\varphi(\ell)=y'(\ell)=\frac{F}{IE}\left[\ell^2-\frac{\ell^2}{2}\right]=\frac{F\ell^2}{2IE}$$

Ezen két utóbbi érték egy másik lehetséges kiszámítási módjára az alakváltoztató munkáról szóló 10. fejezetben még visszatérünk.

3.11.2. Koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó

A 28. ábrán látható, koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó számításánál kihasználjuk annak tükörszimmetriáját, és ezzel visszavezetjük az előző alfejezetben megoldott problémára.



28. ábra

Mivel a két kényszer szimmetrikusan helyezkedik el a terhelő erőhöz képest, ezért a rajtuk fellépő reakcióerők egyenlők lesznek, és – ebből következően – mindkettő a terhelő erő fele lesz: $F_A = F_B = F/2$.

Ugyanígy a szimmetriából következik, hogy a tartó szimmetrikusan fog meghajolni, azaz a két alátámasztási pontnál az elfordulás szögének abszolút értéke (φ_0) meg fog egyezni, csak előjelük lesz ellentétes. Az egyes keresztmetszetek szögelfordulása a tartó közepe felé szimmetrikusan fog változni: ha az egyik oldalon adott x távolságon a megtámasztásnál mérhető pozitív φ_0 értékről a φ_1 ($0 < \varphi_1 < \varphi_0$) értékre változik, akkor a másik megtámasztástól szintén x távolsággal arrébb $-\varphi_1$ lesz a szögelfordulás értéke. A tartó közepénél, mivel az mindkét kényszertől azonos, $\ell/2$ távolságra van, ugyanannyit ($\Delta\varphi$) kell változni a szögelfordulásnak a tartó szélénél megfigyelhetőkhöz képest. De éppen az egyenlő távolság miatt egyik irány sem kitüntetett, a két oldalról számított értéknek meg kell egyeznie: $\varphi_0 + \Delta\varphi = \varphi_0 - \Delta\varphi$, amiből következik, hogy $\Delta\varphi = \varphi_0$, azaz $\varphi(\ell/2) = 0$. A tartó közepének szögelfordulása tehát nulla.

Tekintsünk most úgy a szerkezetre, mintha két, $\ell/2$ hosszú tartó lenne a nulla szögelfordulású keresztmetszetnél, azaz a közepénél befogva, amely keresztmetszetet vegyünk a koordináta-rendszerünk origójául. Ekkor a szabad végeiken egy-egy $F/2$ nagyságú erő hat rájuk fölfele. A két tartó alakja összességében pontosan meg fog egyezni az eredeti kéttámaszú tartó alakjával. Tehát ha a (189) és (190) egyenletekbe F helyére $F/2$-t, ℓ és x helyére pedig $\ell/2$-t írunk, megkapjuk a középen **F** koncentrált erővel terhelt, ℓ hosszúságú

(szélső keresztmetszeteinél alátámasztott) kéttámaszú tartó lehajlását és szögelfordulását a kényszereknél:

(193) $$f\left(\frac{\ell}{2}\right)=y\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{\frac{F}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{3IE}=\frac{F\ell^3}{48IE}$$

(194) $$\varphi\left(\frac{\ell}{2}\right)=y'\left(\frac{\ell}{2}\right)=\frac{\frac{F}{2}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2IE}=\frac{F\ell^2}{16IE}$$

Természetesen a szerkezet számítható a szokásos módon is. Ha az origót az **F** erő támadáspontjába vesszük fel, a tartó jobb oldalán a hajlítónyomaték

(195) $$M_{\rightarrow}(x)=\frac{F}{2}x$$

bal oldalán

(196) $$M_{\leftarrow}(x)=-\frac{F}{2}x$$

lesz. Felírva a rugalmas szál differenciálegyenletét a jobb oldalra:

(197) $$IE\,y''_{\rightarrow}(x)=-M_{\rightarrow}(x)=-\frac{F}{2}x$$

Kétszer kiintegrálva:

(198) $$IE\,y'_{\rightarrow}(x)=-\frac{F}{2}\frac{x^2}{2}+C_1$$

(199) $$IE\,y_{\rightarrow}(x)=-\frac{F}{2}\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$$

Az első határfeltételnél kihasználjuk a korábban elmondottakat, hogy a tartó középső keresztmetszete, ahol az **F** erő hat, nem fordul el:

(200) $$y'_{\rightarrow}(0)=0$$

Ezt beírva a (198) egyenletbe:

(201) $$IE\,0 = \frac{F}{2}\frac{0^2}{2} + \mathrm{C}_1$$

ahonnan $\mathrm{C}_1 = 0$. A másik határfeltétel, hogy az alátámasztásnál a tartó nem mozdul el az *y* irányban:

(202) $$y\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

Ezt a (199) egyenletbe beírva:

(203) $$IE\,0 = -\frac{F}{2}\frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^3}{6} + 0\left(\frac{\ell}{2}\right) + \mathrm{C}_2$$

Az egyenletet rendezve a másik integrálási konstansra kapjuk: $\mathrm{C}_2 = F\ell^3/96$. A két állandót behelyettesítve a (199) egyenletbe, majd rendezve megkapjuk a rugalmas szál alakját leíró függvényt:

(204) $$IE\,y_{\rightarrow}(x) = -\frac{F}{2}\frac{x^3}{6} = \frac{F\ell^3}{96}$$

(205) $$y_{\rightarrow}(x) = \frac{-F\,x^3}{12IE} + \frac{F\,\ell^3}{96IE}$$

Az *x* helyére 0-t behelyettesítve megkapjuk, hogy a tartó jobb oldali részén fellépő erők hatására mennyi a tartó középpontjának a lehajlása:

(206) $$f_{\rightarrow}(0) = y_{\rightarrow}(0) = \frac{-F\,0^3}{12IE} + \frac{F\,\ell^3}{96IE} = \frac{F\,\ell^3}{96IE}$$

Ez azonban csak a jobb oldali rúdrész járuléka. Felírva a bal oldali részre vonatkozó $M_{\leftarrow}(x)$ felhasználásával a rugalmas szál differenciálegyenletét és a számolást elvégezve kapjuk:

(207) $$f_{\leftarrow}(0) = y_{\leftarrow}(0) = \frac{F\,\ell^3}{96IE}$$

Így a teljes lehajlás:

(208) $$f(0) = f_{\rightarrow}(0) + f_{\leftarrow}(0) = \frac{F\,\ell^3}{48IE}$$

azaz ugyanazt kaptuk, mint a szimmetriamegfontolások alapján.

Ha az origót a tartó szélére vesszük fel, a tartó közepétől balra eső keresztmetszetekre az **F** erő már fog adni járulékot a hajlítónyomatékhoz (szemben az $\mathbf{F}_A$ erővel, amely sosem ad). A hajlítónyomaték tehát a tartó közepétől balra eső keresztmetszetben két komponensből fog összeadódni: az $F_B = F/2$ és az F erő hajlítónyomaték-járulékából.

Ismét ketté kell tehát választani a számolást. Először a tartó közepétől jobbra levő keresztmetszetekre írjuk fel a hajlítónyomatéki függvényt, amelyhez járulékot csak az F_B erő ad:

(209) $$M_{\rightarrow}(x) = \frac{F}{2}(\ell - x) = \frac{F\ell}{2} - \frac{F\,x}{2}$$

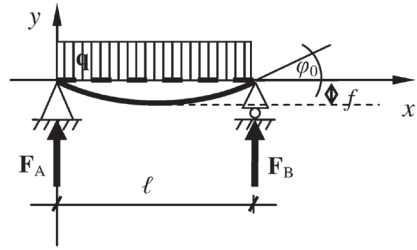
majd a tartó közepétől balra levő keresztmetszetekre írjuk fel a hajlítónyomatéki függvényt, amelyhez járulékot az F_B és az F erő is ad:

(210) $$M_{\leftarrow}(x) = \frac{F}{2}(\ell - x) - F\,x$$

A számolások végeredménye ekkor is a már kétszer megkapott eredmény lesz.

3.11.3. Teljes hosszán állandó nagyságú megoszló erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó

A 29. ábrán látható kéttámaszú tartót teljes hosszán egy **q** egyenletesen megoszló erőrendszerrel terheljük meg. Egy, az origótól x távolságra levő keresztmetszetére ható hajlítónyomatéknak két komponense van. Az egyik a terhelő megoszló erőrendszerből származik, a másik az $\mathbf{F}_B$ reakcióerőből. Már az elején érdemes tisztázni, hogy a rendszer szimmetriája miatt $F_A = F_B = q\ell/2$.



29. ábra

Az origótól x távolságra levő keresztmetszet F_B erő által keltett hajlítónyomaték-járuléka jobbról számolva:

$$M_F(x) = (\ell - x)F_B = (\ell - x)\frac{q\ell}{2} \tag{211}$$

A megoszló erőrendszernek ebben a keresztmetszetben csak a keresztmetszettől jobbra levő része ad járulékot a hajlítónyomatékhoz. Ennek a helyettesítő koncentrált erője tehát $q\,(\ell - x)$, hatásvonalának távolsága az origótól pedig $x + (\ell - x)/2 = (\ell + x)/2$. A megoszló erőrendszer hajlítónyomatékjáruléka tehát

$$M_q(x) = -q(\ell - x)\frac{\ell + x}{2} = -q\frac{\ell^2 - x^2}{2} \tag{212}$$

A teljes hajlítónyomatéki függvény így

$$M(x) = M_F(x) + M_q(x) = (\ell - x)\frac{q\ell}{2} - q\frac{\ell^2 - x^2}{2} = \frac{q\ell^2}{2} - \frac{q\ell x}{2} - \frac{q\ell^2}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

$$M(x) = \frac{qx^2}{2} - \frac{q\ell x}{2} \tag{213}$$

Ezt behelyettesítve a rugalmas szál differenciálegyenletébe:

$$IE\,y''(x) = -M(x) = \frac{q\ell}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \tag{214}$$

Kétszer kiintegrálva:

$$IE\,y'(x) = \frac{q\ell}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{q}{2}\frac{x^3}{3} + C_1 = \frac{q\ell}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C_1 \tag{215}$$

$$IE\,y(x) = \frac{q\ell}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{q}{6}\frac{x^4}{4} + C_1x + C_2 = \frac{q\ell}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + C_1x + C_2 \tag{216}$$

Az integrálási konstansok meghatározásához szükséges határfeltételek közül az első abból következik, hogy a tartó a megtámasztásnál nem mozdul el az y tengely irányában:

$$y(0) = 0 \tag{217}$$

Ezt beírva a (216) egyenletbe:

$$IE\,0 = \frac{q\ell}{12}0^3 - \frac{q}{24}0^4 + C_1 0 + C_2 \tag{218}$$

Rendezve megkapjuk a C_2 integrálási konstans értékét: $C_2 = 0$. A másik határfeltétel megegyezik az előzővel, csak itt a másik kényszerre írjuk fel:

(219) $$y(\ell) = 0$$

Ezt is a (216) egyenletbe behelyettesítve:

(220) $$IE\,0 = \frac{q\ell}{12}\ell^3 - \frac{q}{24}\ell^4 + C_1\ell = \ell\left(\frac{q\ell^3}{12} - \frac{q\ell^3}{24} + C_1\right) = \ell\left(\frac{q\ell^3}{24} + C_1\right)$$

majd rendezve kapjuk: $C_1 = -q\,\ell^3/24$. A konstansokat beírva a (216) és a (215) egyenletbe és $y(x)$-re rendezve megkapjuk a tartó alakját és annak meredekségét leíró függvényeket:

(221) $$y(x) = \frac{q\ell}{12IE}x^3 - \frac{q}{24IE}x^4 - \frac{q\ell^3}{24IE}x = \frac{q}{12IE}\left(\ell x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{\ell^3 x}{2}\right)$$

(222) $$y'(x) = \frac{q}{IE}\left(\frac{\ell x^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{\ell^3}{24}\right)$$

A tartó közepének lehajlását, valamint a végeinek szögelfordulását megkapjuk, ha behelyettesítünk x helyére a (221) egyenletben $\ell/2$-t, a (222) egyenletben pedig 0-t és ℓ-et – ez utóbbi kettőnek a szerkezet szimmetriája miatt egymás (–1)-szeresének kell kijönnie:

(223) $$f\left(\frac{\ell}{2}\right) = y\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{q}{12IE}\left[\ell\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 - \frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^4}{2} - \frac{\ell^3\frac{\ell}{2}}{2}\right] = \frac{q}{12IE}\frac{-5\ell^4}{32} = \frac{5\ell^4 q}{384IE}$$

(224) $$\varphi(\ell) = y'(\ell) = \frac{q}{IE}\left(\frac{\ell\ell^2}{4} - \frac{\ell^3}{6} - \frac{\ell^3}{24}\right) = \frac{q\ell^3}{24IE}$$

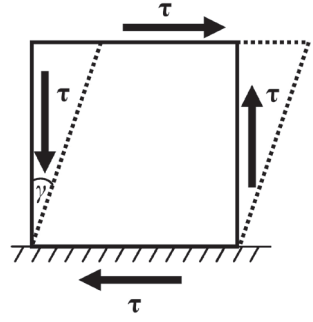
(225) $$\varphi(0) = y'(0) = \frac{q}{IE}\left(\frac{\ell 0^2}{4} - \frac{0^3}{6} - \frac{\ell^3}{24}\right) = \frac{-q\ell^3}{24IE}$$

4. Nyírás

Egy, a talajon rögzített rugalmas kockának a felső, *A* területű lapjára hassunk azzal párhuzamosan egy **V** erővel, azaz nyírjuk el a kockát. Ekkor az itt fellépő felületen megoszló erőrendszer, azaz nyírófeszültség, amelyet jelöljünk $\boldsymbol{\tau}_{ny}$-nyel,

(226) $$\boldsymbol{\tau}_{ny} = \frac{\mathbf{V}}{A}$$

alakú lesz. Természetesen nem véletlenül jelöljük ezt a típusú feszültséget tauval: mivel a terhelő erő, és így a fellépő feszültség is a terhelt keresztmetszet síkjába esik, ezért a $\boldsymbol{\tau}_{ny}$ feszültség csúsztatófeszültség. A kocka a talajon rögzítve van, így nem tud elmozdulni. Ezért a kockának az alsó lapján fel kell lépnie egy szintén $\tau = V/A$ nagyságú, de a felső lapon ható feszültséggel ellentétes irányítottságú feszültségnek. Ez a két feszültség viszont forgatónyomatékot fejt ki a testre, amelynek egyensúlyához ezért szükséges, hogy egy azonos nagyságú, de ellentétes irányú forgatónyomaték is hasson rá. Ez (kocka lévén) a két függőleges oldalon megjelenő, ellentétes irányítottságú $\boldsymbol{\tau}$ feszültségek által valósul meg (30. ábra).



30. ábra

Ezt a jelenséget a csúsztatófeszültségek dualitásának nevezzük. Ennek három alaptulajdonsága van:

1. Ha egy síkban ébred $\boldsymbol{\tau}$ feszültség, akkor a $\boldsymbol{\tau}$ vektorára merőleges síkokban is.
2. A $\boldsymbol{\tau}$ feszültségekkel párhuzamos síkokban nem ébred $\boldsymbol{\tau}$ feszültség.
3. A síkok, amelyekben a $\boldsymbol{\tau}$ feszültségvektorok fekszenek, metszik egymást; egy metszésvonalhoz tartozó két síkban fekvő két $\boldsymbol{\tau}$ vektor közül vagy mindkettő a metszésvonal felé, vagy mindkettő attól elfele mutat.

A nyírásra a Hooke-törvénnyel analóg alakú összefüggés írható fel:

(227) $$\tau = G\gamma$$

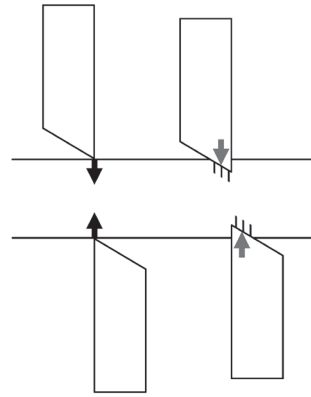
ahol G a csúsztató rugalmassági tényező *(shear modulus),* és γ az elnyíródás szöge. A Young-modulusz és a csúsztató rugalmassági tényező között az alábbi, Poisson-szám segítségével kifejezhető összefüggés áll fenn:

(228) $$G = \frac{1}{2(1+\nu)} E$$

4.1. A tiszta nyírás

Egy egyenes rúd adott keresztmetszete úgynevezett tiszta nyírásra van igénybe véve, ha a keresztmetszettel a rudat két részre bontva a két rúdrészre ható erők eredője a keresztmetszet síkjába esik. Ezt az elrendezést a gyakorlatban nagyon nehéz megvalósítani, mivel az eredők általában nem fognak pontosan egy síkba esni, ezért a valóságban általában a nyírás mellett hajlításra is igénybe van véve a rúd.

Egy elég jó közelítéssel nyírásnak tekinthető eset az, amikor ollóval vágunk: mielőtt az olló élei behatolnak az anyagba, a test tiszta nyírásra van terhelve, mivel az olló élei (viszonylag jó közelítéssel) egy síkba esnek. Mikor azonban már behatolt az anyagba az él, a terhelő erő két, az élek ferde felületén megoszló erőrendszer lesz, amelyek eredői már nem esnek egy síkba, és így forgatónyomatékot keltő erőpárt alkotnak (31. ábra).



31. ábra

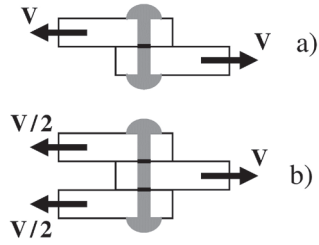
4.2. Méretezés tiszta nyírásra

Mivel a nyírásra igénybe vett keresztmetszetben a rúd tengelyére merőleges feszültségek ébrednek, ezért ezek csúsztatófeszültségek, amelyek nagysága a keresztmetszet mentén változik. Átlagos értéke azonban (a normális feszültségekhez hasonlóan) kifejezhető a nyíróerő nagyságának és a keresztmetszet felületének a hányadosával:

(229) $$\bar{\tau} = \frac{V}{A}$$

Ez a tiszta nyírás alapegyenlete, amely feltételezi a nyírófeszültségek egyenletes eloszlását a keresztmetszeten. Ez a feltétel általában jó közelítéssel teljesül, például nyírásra igénybe vett csapokat, szegecseket, csavarokat ez alapján a képlet alapján méreteznek.

A 32. ábrán egy egy- és egy kétnyírású szegecset láthatunk, amelyek nyírásra igénybe vett felületét a kis vastag szakasz jelöli.



32. ábra

Ha a szegecsszár kör keresztmetszetű, és átmérője D, akkor az a) esetben a (229) alapján az átlagos nyírófeszültség

(230) $$\bar{\tau} = \frac{2V}{A} = \frac{2V}{D^2\pi/4} = \frac{8V}{D^2\pi}$$

míg a b) esetben

(231) $$\bar{\tau} = \frac{2V}{2A} = \frac{2V}{D^2\pi/2} = \frac{4V}{D^2\pi}$$

mivel az erő kétszer akkora felületen oszlik meg.

Ha $\tau \leq \tau_{meg}$, akkor a szegecskötés megfelelő, ahol τ_{meg} a megengedett feszültség. Ennek értéke a különféle anyagokra megtalálható táblázatokban. Általában (de nem minden esetben) elmondható, hogy egy adott anyagra $\tau_{meg} \approx (0{,}6 \,..\, 0{,}8)\, \sigma_{meg}$; rideg anyagoknál például $\tau_{meg} \approx \sigma_{meg}$.

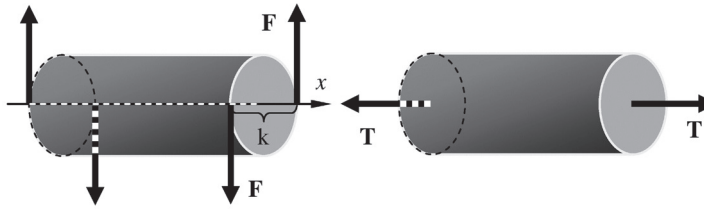
5. Csavarás

Ebben a fejezetben kör és körgyűrű keresztmetszetű tartók csavarásával foglalkozunk.

Ha egy állandó keresztmetszetű tartót mindkét végén azonos nagyságú, de ellentétes irányú, a tartó tengelyébe eső forgatónyomatékkal terhelünk, akkor a tartó igénybevétele tiszta csavarás. A forgatónyomatékot általában egy erőpár alkalmazásával valósítjuk meg. Jelöljük az erőpár alapját **F**-fel, karját *k*-val. Az erőpár forgatónyomatékát **T**-vel jelöljük, és csavarónyomatéknak *(torsion)* nevezzük. Nagysága a forgatónyomaték nagyságának ismert képlete alapján számítható:

(232) $$T = F\,k$$

Iránya merőleges az elcsavarodó keresztmetszetre, irányítottsága pedig a jobbkéz-szabály (illetőleg a vektoriális szorzás konkrét elvégzése) alapján határozható meg (33. ábra).



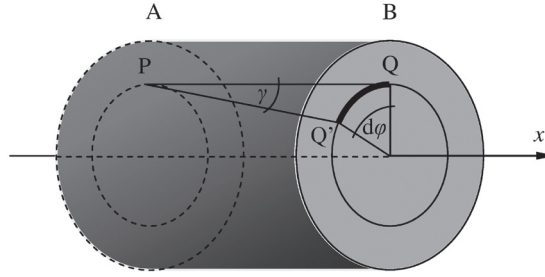
33. ábra

Az alkalmazott forgatónyomatékokat keltő két *Fk* erőpárból láthatjuk, hogy az erők az elcsavarodó keresztmetszetek síkjába esnek, tehát a fellépő csavarófeszültség ($\boldsymbol{\tau}_{cs}$) csúsztatófeszültség lesz. Ekkor az egész tartó egyenletesen van igénybe véve csavarásra, függetlenül annak hosszától. A csavarás során a tartó egyes, az *x* tengelyre mint középvonalra merőleges, egymással párhuzamos keresztmetszetei egymáshoz képest elfordulnak. Az elfordulás szöge egymástól azonos távolságokra levő keresztmetszetekre azonos, és az egyes

keresztmetszetek alakja sem változik. Tehát míg a csavarónyomaték nagysága állandó a tartón annak a két erőpár közti teljes tartományában, függetlenül annak hosszától, az elcsavarodás mértéke már függni fog az erőpárok egymástól vett távolságától.

5.1. Elcsavarodás kis szögek esetén

A fellépő feszültségek vizsgálatához tekintsük az ℓ hosszúságú, R sugarú tartó egy dx hosszúságú darabjának (dx << 1) egy dφ szöggel (dφ << 1) való elcsavarodását (34. ábra).



34. ábra

Rögzítsük a koordináta-rendszerünket a tartó egyik végéhez (A keresztmetszet). Az a szög tehát, amellyel a tartó másik vége (a B keresztmetszet) elcsavarodik, dφ. Legyen a P pont az A keresztmetszeten, annak közepétől r távolságra. Hasonlóan, legyen a Q pont a B keresztmetszeten, annak közepétől r távolságra úgy, hogy a PQ szakasz az elcsavaratlan állapotban az x tengellyel párhuzamos legyen. Ekkor a Q pont a csavarás hatására egy r sugarú körívén r dφ távolságot mozdul el, a Q' pontba:

(233) $$QQ' = r\,\mathrm{d}\varphi$$

amelyre igaz, hogy $r\,\mathrm{d}\varphi \ll \ell$. Jelöljük a QPQ' szöget γ-val. Mivel dφ << 1 és így $r\,\mathrm{d}\varphi \ll \ell$, a QQ' körív közelíthető egy szakasszal, ezzel

(234) $$QQ' = \gamma\,\mathrm{d}x$$

A (233) és (234) egyenletek bal oldalai megegyeznek, igaz tehát a jobb oldalaik egyenlősége is, azaz

(235) $$r\,\mathrm{d}\varphi = \gamma\,\mathrm{d}x$$

Ebből kifejezve a B keresztmetszet szögelfordulását, kapjuk:

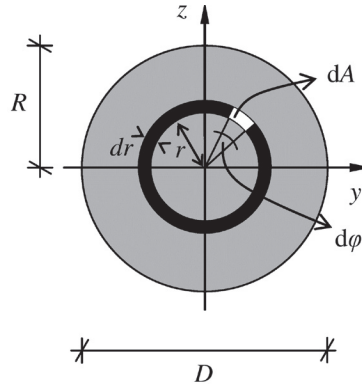
(236) $$\gamma = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

Behelyettesítve a (227) egyenletet:

(237) $$\tau = G\gamma = Gr\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

Mivel a $G\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x$ kifejezés konstans egy adott csavarásra (G anyagi állandó, az egymástól azonos távolságokra levő keresztmetszetek szögelfordulásairól pedig feltettük, hogy azonosak), ezért azt kapjuk, hogy a csavarófeszültség a sugárral lineárisan növekszik úgy, hogy a tartó középvonalában nulla. Ez utóbbi intuitívan is kikövetkeztethető: ha egy egyenest önmaga körül „elcsavarunk", akkor az egyes pontok önmaguk körül „forognak", azaz az egyenes maga nem változik meg.

Vizsgáljunk most egy infinitezimálisan kicsi, dr szélességű, a keresztmetszet középpontjától r távolságra levő körgyűrű alakú tartományt. Hasson a keresztmetszetre egy **T** csavarónyomaték, amelynek hatására a keresztmetszet elcsavarodása legyen dφ. A körgyűrű alakú tartomány ezen dφ középponti szöghöz tartozó felületelemét jelöljük dA-val (lásd 35. ábra).



35. ábra

Ekkor a külső **T** csavarónyomatékkal a teljes keresztmetszeten ébredő összcsavarófeszültség forgatónyomatéka tart egyensúlyt:

(238) $$T = \int_A r\,\tau\,\mathrm{d}A$$

A dA felületelem területe kifejezhető a körgyűrű alakú tartomány dr szélességének és a dφ középponti szöghöz tartozó r dφ hosszúságú ívének szorzataként (mivel dφ << 1, ezért a körív közelíthető szakasszal):

(239) $$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

Ezt behelyettesítve a (238) egyenletbe:

(240) $$T = \int_0^{2\pi R}\int_0 r\,\tau\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Mivel a szög szerinti integrálástól semmi más nem függ, az kiemelhető és külön elvégezhető:

(241) $$T = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\tau\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R r^2\tau\,\mathrm{d}r$$

Behelyettesítve a (237) egyenletben kapott eredményt:

(242) $$T = 2\pi\int_0^R r^2\,G\,r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}r$$

A G dφ/dx tényezők konstansok, ezért kihozhatók az integrál elé:

(243) $$T = 2\pi G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r$$

Vegyük észre, hogy a $2\pi\int r^3\,\mathrm{d}r$ kifejezés a 3.4.2.1. alfejezet és a (85) alapján nem más, mint a kör poláris másodrendű nyomatéka. Ha az integrálás alsó határa nem 0, hanem valamilyen $R_0 < R$ érték, akkor az a körgyűrű poláris másodrendű nyomatékát adja eredményül. Ezt behelyettesítve kapjuk:

(244) $$T = I_\mathrm{p}G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

ahol az előbb elmondottak alapján az I_p vagy a körlapra, vagy a körgyűrűre vonatkozó érték. Kifejezve (244)-ből a $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x$ deriváltat, majd visszaírva a (237) egyenletbe:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{I_p G} \tag{245}$$

$$\tau = \frac{T}{I_p} R \tag{246}$$

A legnagyobb csavarófeszültség tehát a keresztmetszet szélén lép fel. Vagyis ugyanazt látjuk, mint a hajlítófeszültségnél, amelynek maximuma a szélső szálnál volt, hiszen itt is a keresztmetszet középpontjától a legnagyobb távolságra ébred a legnagyobb feszültség:

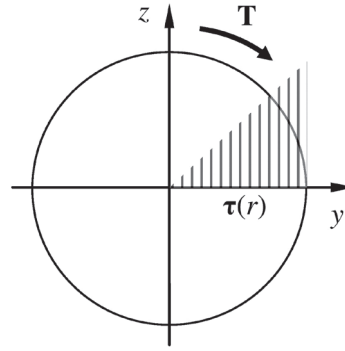
$$\tau_{max} = \frac{T}{I_p} \frac{D}{2} \tag{247}$$

A hajlításhoz hasonlóan bevezetve az analóg K_p poláris keresztmetszeti tényezőt, a maximális csavarófeszültség:

$$K_p = \frac{I_p}{R} \tag{248}$$

$$\tau_{max} = \frac{T}{K_p} \tag{249}$$

Mivel nem vektoros alakban dolgoztunk, a (238) egyenletről még azt is el kell mondani, hogy a külső **T** csavarónyomatékkal a teljes keresztmetszeten ébredő össz-csavarófeszültség forgatónyomatéka csak akkor tud egyensúlyt tartani, ha nemcsak nagysága azonos vele (amit az előbbiekben számoltunk ki), hanem iránya is ellentétes vele. Ez azt jelenti, hogy a keresztmetszetben csavarás hatására fellépő csavarófeszültségek mindig *ellentétes irányúak* a **T** csavarónyomatékkal (36. ábra).



36. ábra

Határozzuk meg egy tartó elcsavarodását adott csavarónyomaték hatására. Legyen a tartó hossza ℓ. A (245) egyenlet mindkét oldalát beszorozva dx-szel és mindkét oldalt integrálva:

(250) $$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \int \frac{T}{I_\mathrm{p} G}\,\mathrm{d}x = \frac{T}{I_\mathrm{p} G}\int \mathrm{d}x = \frac{T}{I_\mathrm{p} G}\,\ell$$

(251) $$\varphi = \frac{T\,\ell}{I_\mathrm{p} G}$$

Az $I_\mathrm{p}G$ szorzatot, az $I\,E$ hajlítómerevséggel analóg módon, csavarómerevségnek nevezzük.

5.2. Méretezés és ellenőrzés

Más egyszerű igénybevételekhez hasonlóan csavarásra is úgy méretezünk, hogy a tartóban fellépő maximális csavarófeszültség, τ_max, ne legyen nagyobb a tartó anyagára megengedett maximális csavarófeszültségnél, τ_meg-nél:

(252) $$\tau_\mathrm{max} \overset{!}{\leq} \tau_\mathrm{meg}$$

A csavarásra megengedett csúsztatófeszültség általában valamivel kisebb, mint a nyírásra megengedett csúsztatófeszültség. Szívós anyagokra a megengedett húzófeszültség és csavarófeszültség aránya

(253) $$\tau_{\text{csavaró,meg}} \approx 0{,}58\sigma_{\text{húzó,meg}}$$

A (247) és (252) egyenletek alapján meghatározhatjuk kör keresztmetszetű tartókra azok minimális átmérőjét. Ezután ellenőrzésképpen még meg kell vizsgálnunk, hogy a (251) alapján számolható φ elcsavarodási szög nagysága a megadott értéknél kisebb-e. Tengelyek esetében ennek folyóméterenkénti értéke például nem lehet nagyobb, mint 0,25°.

Vákát oldal

6. Feszültségállapot ábrázolása

Miután áttekintettük, hogy milyen típusú feszültségek lépnek fel az egyes igénybevételek hatására, ismerkedjünk meg ezek grafikus ábrázolásának lehetőségével. Ehhez az adott test egy P pontjának alakváltozását és feszültségállapotát vizsgáljuk, utóbbi reprezentációjára egy infinitezimális méretű, a P pontot reprezentáló „kiskockát" veszünk alapul, amelynek élei párhuzamosak a jobbsodrású koordináta-rendszer éleivel.

6.1. Alakváltozási tenzor

Egy adott P pont deformációját a koordinátatengelyek irányában az ε_x, ε_y és ε_z fajlagosnyúlás-értékekkel, a tengelyekre merőlegesen a $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ és $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ elnyíródási szögekkel jellemezhetjük (természetesen nem mind különbözik szükségszerűen nullától tetszőleges igénybevétel esetén). Ezeket az alábbi módon egy 3×3-as mátrixba rendezve megkapjuk az adott feszültségek hatására a vizsgált P pontban létrejövő deformációt jellemző úgynevezett alakváltozási mátrixot:

(254)
$$\mathbf{A}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

amely az adott *xyz* jobbsodrású koordináta-rendszerben minden információt tartalmaz az adott P pont alakváltozási állapotáról. Másik, *x'y'z'* koordináta-rendszerben természetesen ugyanannak a P pontnak az alakváltozási állapotát leíró $\mathbf{A'}_{\mathrm{P}}$ mátrix elemeinek (általában) más lesz a konkrét értéke.

Az alakváltozási mátrix az úgynevezett alakváltozási vektorokból mint komponensekből álló vektor. Az *x*, *y* és *z* irányú alakváltozási vektor:

$$(255)\qquad \boldsymbol{\alpha}_x = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \end{bmatrix}^* = \boldsymbol{\alpha}_x^*$$

$$(256)\qquad \boldsymbol{\alpha}_y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \end{bmatrix}^* = \boldsymbol{\alpha}_y^*$$

$$(257)\qquad \boldsymbol{\alpha}_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}^* = \boldsymbol{\alpha}_z^*$$

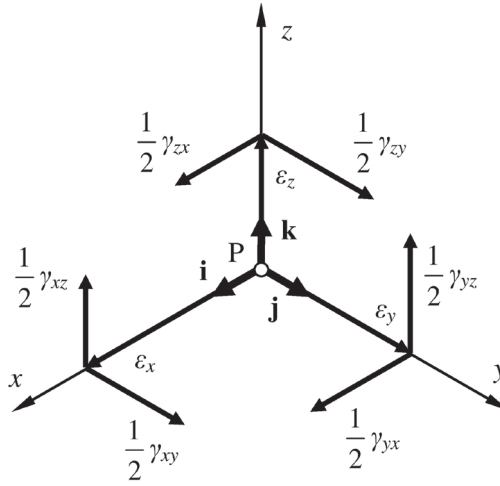
amelyekből tehát felépíthető az alakváltozási mátrix.

$$(258)\quad \mathbf{A}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_x^* \\ \boldsymbol{\alpha}_y^* \\ \boldsymbol{\alpha}_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_x & \boldsymbol{\alpha}_y & \boldsymbol{\alpha}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_x^* \\ \boldsymbol{\alpha}_y^* \\ \boldsymbol{\alpha}_z^* \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_x & \boldsymbol{\alpha}_y & \boldsymbol{\alpha}_z \end{bmatrix}^* = \mathbf{A}_{\mathrm{P}}^*$$

Ha az adott *xyz* koordináta-rendszerben az *x*, *y* és *z* irányú egységvektorokat rendre **i**-vel, **j**-vel és **k**-val jelöljük, azaz **i** = [1; 0; 0], **j** = [0; 1; 0] és **k** = [0; 0; 1], az alakváltozási mátrix még egy további módon is felírható. Képezzük az alakváltozási vektorok és a megfelelő egységvektorok diadikus szorzatát, és az így kapott 3×3-as mátrixokat (amelyeknek mindig csak egy sora vagy egy oszlopa nem nulla, az, ahol az egységvektor „1” eleme szerepel) adjuk össze:

(259) $$\mathbf{A}_\mathrm{P} = \boldsymbol{\alpha}_x \circ \mathbf{i}^* + \boldsymbol{\alpha}_y \circ \mathbf{j}^* + \boldsymbol{\alpha}_z \circ \mathbf{k}^* = \mathbf{i} \circ \boldsymbol{\alpha}_x^* + \mathbf{j} \circ \boldsymbol{\alpha}_y^* + \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\alpha}_z^* = \mathbf{A}_\mathrm{P}^*$$

Az alakváltozási mátrix szemléltethető a koordináta-rendszerben is úgy, hogy az $\mathbf{A}_\mathrm{P}$ mátrix egyes elemeinek értékeit a 37. ábra szerint vektorokként ábrázoljuk.



37. ábra

6.1.1. Alakváltozási állapot tetszőleges tengely irányában

Az $\mathbf{A}_\mathrm{P}$ mátrix, és így az $\boldsymbol{\alpha}_x$, $\boldsymbol{\alpha}_y$ és $\boldsymbol{\alpha}_z$ vektorok ismeretében a P pont alakváltozása tetszőleges tengely irányában felírható, ehhez mindössze az adott tengely irányába mutató egységvektorra van szükség. Legyen ez az **m** egységvektor az $\mathbf{A}_\mathrm{P}$ koordináta-rendszerében: $\mathbf{m}^* = [m_1; m_2; m_3]$, amelyre igaz, hogy $|\mathbf{m}| = \sqrt{(m_1^2+m_2^2+m_3^2)} = 1$. Az **m** irányú alakváltozás vektora az alakváltozási tenzor mátrixának és az **m** egységvektornak a szorzataként áll elő:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}} = \mathbf{A}_{\mathrm{P}}\,\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x m_1 + \frac{1}{2}\gamma_{xy} m_2 + \frac{1}{2}\gamma_{xz} m_3 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} m_1 + \varepsilon_y m_2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz} m_3 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} m_1 + \frac{1}{2}\gamma_{zy} m_2 + \varepsilon_z m_3 \end{bmatrix}$$

(260)
$$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}} = \mathbf{A}_{\mathrm{P}}\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x m_1 + \frac{1}{2}\gamma_{xy} m_2 + \frac{1}{2}\gamma_{xz} m_3 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} m_1 + \varepsilon_y m_2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz} m_3 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} m_1 + \frac{1}{2}\gamma_{zy} m_2 + \varepsilon_z m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{m1} \\ \alpha_{m2} \\ \alpha_{m3} \end{bmatrix}$$

Ebből meghatározható az **m** irányú fajlagos nyúlás mértéke az $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}}$ és az **m** skaláris szorzataként:

$$\varepsilon_{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}}^{*}\mathbf{m} = \mathbf{m}^{*}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{m1} m_1 + \alpha_{m2} m_2 + \alpha_{m3} m_3 \end{bmatrix}$$

(261)
$$\varepsilon_{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}}^{*}\mathbf{m} = \alpha_{m1} m_1 + \alpha_{m2} m_2 + \alpha_{m3} m_3$$

Összefoglalva tehát, a fajlagos nyúlás úgy határozható meg egy adott **m** egységvektor irányában, ha az alakváltozási tenzort ezzel az egységvektorral balról és jobbról is összeszorozzuk:

(262)
$$\varepsilon_{\mathbf{m}} = \mathbf{m}^{*}\mathbf{A}_{\mathrm{P}}\mathbf{m}$$

A (261) egyenlet mindkét oldalát beszorozva $\mathbf{m}^{*}$-gal és kihasználva, hogy **m** egységvektor volta miatt $\mathbf{m}\mathbf{m}^{*} = 1$:

(263)
$$\varepsilon_{\mathbf{m}}\mathbf{m}^{*} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}}^{*}$$

(264) $$\varepsilon_{\mathbf{m}}\mathbf{m} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{m}}$$

Két egységvektor (például **m** és **n**) által meghatározott síkban az elnyíródás szöge az előbb bemutatottal analóg módon számítható ki azzal a különbséggel, hogy az alakváltozási tenzort egyik oldalról az egyik, a másik oldalról a másik egységvektorral kell megszorozni. Az $\mathbf{A}_{\mathrm{P}}$ mátrix szimmetrikus volta miatt nemcsak a szorzás sorrendje lényegtelen, hanem hogy melyik vektorral melyik oldalról szorozzuk az alakváltozási mátrixot:

(265) $$\gamma_{\mathbf{mn}} = \mathbf{m}^{*}\mathbf{A}_{\mathrm{P}}\mathbf{n} = \mathbf{n}^{*}\mathbf{A}_{\mathrm{P}}\mathbf{m} = \gamma_{\mathbf{nm}}$$

A számolás visszafele is működik. Azaz ismerve egy irányban a fajlagos nyúlás értékét, és ez az irány az **a** egységvektorral mint irányvektorral jellemezhető, amely az *xyz* koordináta-rendszerben az **i**, **j** és **k** egységvektorok lineáris kombinációjaként felírható, akkor az **a** egységvektor komponenseit és a fajlagos nyúlás értékét beírva a (261) egyenletbe kapunk egy háromismeretlenes egyenletet. Ha még két irányban (például egy **b** és egy **c** egységvektorral mint irányvektorral jellemezhető irányban) ismerjük a fajlagos nyúlás értékét, egy három egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelyet megoldva megkapjuk az alakváltozási tenzor mátrixát az *xyz* koordináta-rendszerben.

6.1.2. Alakváltozási főirányok, főnyúlások

Felmerül a kérdés, hogy létezik-e olyan koordináta-rendszer, amelyben az adott alakváltozási állapotot reprezentáló alakváltozási mátrixnak csak a főátlójában vannak nemnulla elemek?

A probléma megoldásának matematikai neve főtengely-transzformáció, amikor egy tenzor ismert koordináta-rendszerbeli mátrixreprezentációjáról egy olyan koordináta-rendszerbeli mátrixreprezentációra térünk át, amelyben a mátrix offdiagonális elemei nullák.

Ehhez először meg kell határozni a mátrix sajátértékeit, amelyből egy 3×3-as mátrixnak 3 van (amelyek azonban eshetnek egybe). Ez úgy történik, hogy az eredeti mátrixból kivonjuk az egységmátrix ε_i-szeresét, a különbségmátrix determinánsát egyenlővé tesszük nullával, és megoldjuk az egyenletet. A három kapott megoldás ε_i-re a mátrix három sajátértéke.

(266) $$\det(\mathbf{A}_{\mathrm{P}} - \varepsilon_i\mathbf{E}) = 0$$

(267)
$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_i & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_i & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_i \end{vmatrix} = 0$$

A kapott egyenlet egyes tagjait ε_i hatványai szerint csoportosítva, a köbös tag együtthatójával leosztva és a négyzetes, a lineáris és a nulladrendű tag együtthatóját rendre A_{I}-gyel, A_{II}-vel és A_{III}-mal jelölve:

(268)
$$\varepsilon_i^3 - A_{\mathrm{I}}\varepsilon_i^2 - A_{\mathrm{II}}\varepsilon_i - A_{\mathrm{III}} = 0$$

ahol A_{I}, A_{II} és A_{III} a feszültségi tenzor úgynevezett skalárinvariánsai:

(269)
$$A_{\mathrm{I}} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

(270)
$$A_{\mathrm{II}} = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2\right)$$

(271)
$$A_{\mathrm{III}} = \det \mathbf{A}_{\mathrm{P}}$$

A (268) egyenletet megoldva ε_i-re a három kapott érték az $\mathbf{A}_{\mathrm{P}}$ mátrix három sajátértéke, amelyeket nagyság szerint indexelünk, és az adott alakváltozási állapot főnyúlásainak nevezünk:

(272)
$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

Ezekkel az alakváltozási mátrix:

(273)
$$\mathbf{A}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

A főnyúlások ismeretében tetszőleges, az x, az y és a z tengelyekkel α, β és γ szöget bezáró, **v** irányvektorral jellemezhető tengely mentén kifejezhető az alakváltozási vektor:

(274) $$\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{n}} = \varepsilon_1 \mathbf{v}\cos(\alpha) + \varepsilon_2 \mathbf{v}\cos(\beta) + \varepsilon_3 \mathbf{v}\cos(\gamma) = \\ = \boldsymbol{\alpha}_1 \cos(\alpha) + \boldsymbol{\alpha}_2 \cos(\beta) + \boldsymbol{\alpha}_3 \cos(\gamma)$$

ahol $\boldsymbol{\alpha}_i = \varepsilon_i \mathbf{v}$, kihasználva a (263)–(264) összefüggéseket.

Bármely alakváltozási állapot mátrixa felírható két tenzor összegeként: az egyik egy, a térfogat megváltozásával járó, minden irányban azonos ε_0 nagyságú gömbszimmetrikus nyúlást ír le, míg a másik csak szögváltozásokat tartalmaz, térfogatváltozást nem. Az elsőt gömbtenzornak, a másodikat deviációs tenzornak nevezzük. A gömbtenzor mátrixa:

(275) $$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

Egy általános alakváltozási mátrix felbontása:

(276) $$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_\mathrm{d}$$

6.2. Feszültségtenzor

Tegyük fel, hogy egy P pontra hatnak normális és csúsztatófeszültségek. Ezek általános esetben σ_x, σ_y és σ_z, valamint (a csúsztatófeszültségek dualitása miatt) $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ és $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Az alakváltozási tenzor mátrixához hasonló módon ezeket az értékeket egy 3×3-as mátrixba rendezve megkapjuk az adott feszültségek hatására a vizsgált P pontban létrejövő deformációt jellemző feszültségmátrixot:

(277) $$\mathbf{F}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

amely az adott *xyz* jobbsodrású koordináta-rendszerben minden információt tartalmaz az adott P pont feszültségállapotáról.

Az alakváltozási mátrixszal analóg módon a feszültségmátrix az úgynevezett feszültségvektorokból mint komponensekből álló vektor. Az *x*, *y* és *z* irányú feszültségvektorok:

(278) $$\boldsymbol{\rho}_x = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \end{bmatrix}^* = \boldsymbol{\rho}_x^*$$

(279) $$\boldsymbol{\rho}_y = \begin{bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \end{bmatrix}^* = \boldsymbol{\rho}_y^*$$

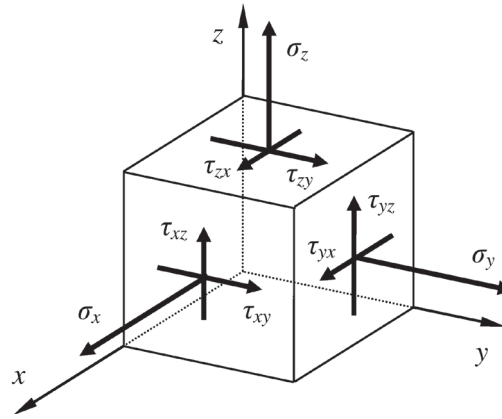
(280) $$\boldsymbol{\rho}_z = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}^* = \boldsymbol{\rho}_z^*$$

amelyekből tehát felépíthető a feszültségmátrix.

(281) $$\mathbf{F}_\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_x^* \\ \boldsymbol{\rho}_y^* \\ \boldsymbol{\rho}_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_x & \boldsymbol{\rho}_y & \boldsymbol{\rho}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_x^* \\ \boldsymbol{\rho}_y^* \\ \boldsymbol{\rho}_z^* \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_x & \boldsymbol{\rho}_y & \boldsymbol{\rho}_z \end{bmatrix}^* = \mathbf{F}_\mathrm{P}^*$$

A feszültségmátrix is felírható az *xyz* koordináta-rendszer **i**, **j** és **k** egységvektorai és a feszültségvektorok diadikus szorzataként képzett 3×3-as mátrixok összegeként:

(282) $$\mathbf{F}_\mathrm{P} = \boldsymbol{\rho}_x \circ \mathbf{i}^* + \boldsymbol{\rho}_y \circ \mathbf{j}^* + \boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{k}^* = \mathbf{i} \circ \boldsymbol{\rho}_x^* + \mathbf{j} \circ \boldsymbol{\rho}_y^* + \mathbf{k} \circ \boldsymbol{\rho}_z^* = \mathbf{F}_\mathrm{P}^*$$



38. ábra

A feszültségmátrix is szemléltethető a kiskockán, amelynek lapjai merőlegesek az *x*, *y* és a *z* koordinátatengelyekre. Az $\mathbf{F}_P$ mátrix egyes elemeinek értékeit a 38. ábra alapján mérjük fel a koordináta-rendszerben: a σ feszültségek párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, a τ feszültségek első indexe azt mutatja meg, hogy melyik koordinátatengely irányú lapon lépnek fel, a második indexe pedig azt mutatja meg, hogy melyik koordinátatengely irányába mutatnak.

6.2.1. Feszültségállapot tetszőleges tengely irányában

Az $\mathbf{F}_P$ mátrix, és így az $\boldsymbol{\rho}_x$, $\boldsymbol{\rho}_y$ és $\boldsymbol{\rho}_z$ vektorok ismeretében a P pontra ható feszültség tetszőleges tengely irányában felírható, ehhez mindössze az adott tengely irányába mutató egységvektorra van szükség. Legyen ez az **n** egységvektor az $\mathbf{F}_P$ koordináta-rendszerében: $\mathbf{n}^* = [n_1; n_2; n_3]$, amelyre igaz, hogy $|\mathbf{n}| = \sqrt{(n_1^2+n_2^2+n_3^2)} = 1$. Az **n** irányú feszültségvektor a feszültségtenzor mátrixának és az **n** egységvektornak a szorzataként áll elő:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} = \mathbf{F}_{\mathrm{P}}\,\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2 + \tau_{xz} n_3 \\ \tau_{yx} n_1 + \sigma_y n_2 + \tau_{yz} n_3 \\ \tau_{zx} n_1 + \tau_{zy} n_2 + \sigma_z n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{n1} \\ \rho_{n2} \\ \rho_{n3} \end{bmatrix}$$

(283) $$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} = \mathbf{F}_{\mathrm{P}}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_1 + \tau_{xy} n_2 + \tau_{xz} n_3 \\ \tau_{yx} n_1 + \sigma_y n_2 + \tau_{yz} n_3 \\ \tau_{zx} n_1 + \tau_{zy} n_2 + \sigma_z n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{n1} \\ \rho_{n2} \\ \rho_{n3} \end{bmatrix}$$

Ebből meghatározható az **n** irányú feszültség értéke a $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}}$ és az **n** vektorok skaláris szorzataként:

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}}^{*}\,\mathbf{n} = \mathbf{n}^{*}\,\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{n1} n_1 + \rho_{n2} n_2 + \rho_{n3} n_3 \end{bmatrix}$$

(284) $$\sigma_{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}}^{*}\mathbf{n} = \rho_{n1} n_1 + \rho_{n2} n_2 + \rho_{n3} n_3$$

Összefoglalva tehát a feszültség úgy határozható meg egy adott **n** egységvektor irányában, ha a feszültségmátrixot ezzel az egységvektorral balról és jobbról is összeszorozzuk:

(285) $$\sigma_{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^{*}\mathbf{F}_{\mathrm{P}}\mathbf{n}$$

A (284) egyenlet mindkét oldalát beszorozva $\mathbf{n}^{*}$-gal és kihasználva, hogy **n** egységvektor volta miatt $\mathbf{n}\mathbf{n}^{*} = 1$:

(286) $$\sigma_{\mathbf{n}}\mathbf{n}^{*} = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}}^{*}$$

(287) $$\sigma_{\mathbf{n}}\mathbf{n} = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}}$$

Két egységvektor (például **m** és **n**) által meghatározott síkban a nyírófeszültség értéke az előbb bemutatottal analóg módon számítható ki azzal

a különbséggel, hogy a feszültségtenzort egyik oldalról az egyik, a másik oldalról a másik egységvektorral kell megszorozni. Az $\mathbf{F}_P$ mátrix szimmetrikus volta miatt nemcsak a szorzás sorrendje lényegtelen, hanem hogy melyik vektorral melyik oldalról szorozzuk a feszültségmátrixot:

(288) $$\tau_{\mathbf{mn}} = \mathbf{m}^* \mathbf{F}_P \mathbf{n} = \mathbf{n}^* \mathbf{F}_P \mathbf{m} = \tau_{\mathbf{nm}}$$

Az alakváltozási tenzor mátrixának esetéhez hasonlóan a számolás itt is működik visszafele. Azaz ismerve egy irányban a feszültség nagyságát, és ez az irány az **a** egységvektorral mint irányvektorral jellemezhető, amely az *xyz* koordináta-rendszerben az **i**, **j** és **k** egységvektorok lineáris kombinációjaként felírható, akkor az **a** egységvektor komponenseit és a feszültség értékét beírva a (284) egyenletbe kapunk egy háromismeretlenes egyenletet. Ha még két irányban (például egy **b** és egy **c** egységvektorral jellemezhető irányban) ismerjük a feszültség értékét, egy három egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelyet megoldva megkapjuk a feszültségtenzor mátrixát az *xyz* koordináta-rendszerben.

6.2.2. Főirányok, főfeszültségek

Határozzuk meg az alakváltozási állapothoz hasonlóan azt a koordináta-rendszert, amelyben a feszültségmátrixnak csak a főátlójában vannak nemnulla elemei. Ehhez itt is először meg kell határozni a mátrix három sajátértékét:

(289) $$\det(\mathbf{F}_P - \sigma_i \mathbf{E}) = 0$$

(290) $$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0$$

A kapott egyenlet egyes tagjait σ_i hatványai szerint csoportosítva, a köbös tag együtthatójával leosztva és a négyzetes, a lineáris és a nulladrendű tag együtthatóját rendre F_{I}-gyel, F_{II}-vel és F_{III}-mal jelölve:

(291) $$\sigma_i^3 - F_{\mathrm{I}}\sigma_i^2 - F_{\mathrm{II}}\sigma_i - F_{\mathrm{III}} = 0$$

ahol F_{I}, F_{II} és F_{III} a feszültségi tenzor úgynevezett skalárinvariánsai:

(292) $$F_{\mathrm{I}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

(293) $$F_{\mathrm{II}} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)$$

(294) $$F_{\mathrm{III}} = \det \mathbf{F}_{\mathrm{P}}$$

A (291) egyenletet megoldva σ_i-re a három kapott érték az $\mathbf{F}_{\mathrm{P}}$ mátrix három sajátértéke, amelyeket nagyság szerint indexelünk, és az adott feszültségállapot főfeszültségeinek nevezünk:

(295) $$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Ebben a koordináta-rendszerben a feszültségi fősíkokon nem működnek csúsztatófeszültségek, ezért a feszültségmátrix

(296) $$\mathbf{F}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

alakú lesz. A főfeszültségek ismeretében tetszőleges, az x, az y és a z tengelyekkel α, β és γ szöget bezáró, $\mathbf{v}$ irányvektorral jellemezhető tengely mentén kifejezhető a feszültségvektor:

(297) $$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{n}} = \sigma_1\mathbf{v}\cos(\alpha) + \sigma_2\mathbf{v}\cos(\beta) + \sigma_3\mathbf{v}\cos(\gamma) = \boldsymbol{\rho}_1\cos(\alpha) + \boldsymbol{\rho}_2\cos(\beta) + \boldsymbol{\rho}_3\cos(\gamma)$$

ahol $\boldsymbol{\rho}_i = \sigma_i\mathbf{v}$, kihasználva a (286)–(287) összefüggéseket.

6.2.2.1. Síkbeli feszültségállapot

Síkbeli feszültségállapotnak nevezzük azt a feszültségállapotot, amikor pontosan két főfeszültség nem nulla. Ez azt is jelenti, hogy a feszültségmátrix a következő alakot veszi fel:

(298) $$\mathbf{F}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kiszámítva a főfeszültségeket:

(299) $$\sigma_1 = 0$$

(300) $$\sigma_{2,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Mekkora szöget zárnak be a főirányok a (298) mátrixának koordinátatengelyeivel? Ehhez először írjuk fel általánosan az eredeti koordináta-rendszer x tengelyével α szöget bezáró **m** egységvektorral párhuzamos $\sigma_{\mathbf{m}}$ nagyságú, és az arra merőleges **n** egységvektor irányú $\tau_{\mathbf{mn}}$ nagyságú csúsztatófeszültségeket!

(301) $$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

(302) $$\sigma_{\mathbf{m}} = \mathbf{m}\,\mathbf{F}\,\mathbf{m} = \sigma_x \cos^2(\alpha) + 2\tau_{xy} \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \sigma_y \sin^2(\alpha)$$

(303) $$\tau_{\mathbf{mn}} = \mathbf{n}\,\mathbf{F}\,\mathbf{m} = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \tau_{xy}\left(\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha)\right)$$

A (302)–(303) egyenleteket 2α szögfüggvényeként felírva:

(304) $$\sigma_{\mathbf{m}} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos(2\alpha) + \tau_{xy}\sin(2\alpha)$$

(305) $$\tau_{\mathbf{mn}} = \tau_{xy}\cos(2\alpha) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin(2\alpha)$$

Mivel a főfeszültségi irányokban a csúsztatófeszültségek értéke nulla, a (303)-at 0-val egyenlővé téve és megoldva kapjuk:

(306) $$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

(307) $$\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

6.2.2.2. Tiszta nyírás

Tiszta nyírás esetében a feszültségmátrix:

(308) $$\mathbf{F}_{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kiszámítva a főfeszültségeket:

(309) $$\sigma_1 = \tau_{xy}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_{xy}$$

6.2.2.3. Hidrosztatikus és deviációs feszültségállapot

Hidrosztatikus feszültségállapotnak nevezzük azt a feszültségállapotot, amikor mindhárom főfeszültség azonos. Nincsenek kitüntetett irányok, minden tengely főtengely, a feszültségállapot gömbszimmetrikus. A feszültségmátrix tehát a következő alakot veszi fel:

(310) $$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$$

Bármely feszültségállapot mátrixa felírható egy gömbszimmetrikus feszültségmátrix és egy úgynevezett feszültségdeviátor összegeként:

(311) $$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{\mathrm{d}}$$

6.3. Az általános Hooke-törvény

Tiszta homogén húzáskor nemcsak megnyúlik a rúd a húzás irányában, hanem keresztmetszeti kontrakciót is szenved (lásd 2.1. alfejezet). A (20) és a (30) alapján egy elemi kocka egyik lapjára merőleges irányban (kihasználva, hogy ez az egyik főirány) σ_1 nagyságú feszültséggel történő húzás esetében felírhatjuk az élek fajlagos nyúlását, amelyek így a főnyúlások lesznek:

(312) $$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad \varepsilon_2 = -\nu\frac{\sigma_1}{E} \quad \varepsilon_3 = -\nu\frac{\sigma_1}{E}$$

ahol E a Young-modulusz és ν a Poisson-szám.

A másik két lapra merőleges irányban, azaz a másik két főirányban σ_2-vel, illetve σ_3-mal terhelve a hasábot:

(313) $$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_2}{E} \quad \varepsilon_2 = -\nu\frac{\sigma_2}{E} \quad \varepsilon_3 = -\nu\frac{\sigma_2}{E}$$

(314) $$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_3}{E} \quad \varepsilon_2 = -\nu\frac{\sigma_3}{E} \quad \varepsilon_3 = -\nu\frac{\sigma_3}{E}$$

Mivel a három feszültség egyidejű működésekor az egyes irányokban létrejövő fajlagos nyúlások additívak, a (312)–(314) egyenleteinek összeadásával kapjuk:

(315)
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right]$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

Azonos átalakítást végrehajtva:

(316)
$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_1 - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right]$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_2 - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right]$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_3 - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

valamint kihasználva, hogy $E = 2G(1 + \nu)$:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2G}\left[\sigma_1 - \frac{\nu}{1+\nu}F_\mathrm{I}\right]$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2G}\left[\sigma_2 - \frac{\nu}{1+\nu}F_\mathrm{I}\right] \tag{317}$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2G}\left[\sigma_3 - \frac{\nu}{1+\nu}F_\mathrm{I}\right]$$

ahol F_I a feszültségmátrix első skalárinvariánsa. Az így kapott három egyenlet felírható a (273) és a (296) segítségével:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2G}\left(\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu}F_\mathrm{I}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) \tag{318}$$

Tenzoros alakban:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2G}\left(\mathbf{F} - \frac{\nu}{1+\nu}F_\mathrm{I}\,\mathbf{E}\right) \tag{319}$$

A (319) egyenletet, amely a feszültségi és az alakváltozási állapot kapcsolatát írja le, általános Hooke-törvénynek nevezünk. Az egyenlet hasonlóan levezethető a (315) egyenletek átrendezéséből a feszültségtenzorra:

$$\mathbf{F} = 2G\left(\mathbf{A} + \frac{\nu}{1-2\nu}A_\mathrm{I}\,\mathbf{E}\right) \tag{320}$$

ahol A_I az alakváltozási mátrix első skalárinvariánsa. Az általános Hooke-törvény minden koordináta-rendszerben érvényes, nem csak a főirányokra illeszkedőben.

7. Kihajlás

A 2.6. alfejezetben definiáltuk a zömök és a karcsú rudak közti különbséget: a zömök rudak átmérője nagyságrendileg összemérhető a hosszával, míg egy karcsú rúd esetében nem. Az ott elmondottak csak zömök rudakra voltak érvényesek, mert a kihajlást nem vettük figyelembe. Ezért most visszatérünk erre az esetre, karcsú rudak nyomására.

Ha egy karcsú rúdra csak kis nyomófeszültséggel hatunk, ugyanúgy viselkedik, mint egy zömök rúd, és alkalmazhatóak az arra az esetre elmondottak. Ha nagy nyomófeszültséget alkalmazunk, akkor viszont a rúd alapvetően megváltoztatja az alakját: kihajlik, esetleg el is törik.

Kísérleti eredmények azt mutatják, hogy a kihajlás *(buckling)* bizonyos körülmények között már akkor bekövetkezik, amikor a nyomófeszültség még a rugalmassági határt ($-\sigma_E$) sem éri el, más esetekben viszont csak ennél nagyobb feszültségek esetében. Előbbit nevezzük rugalmas kihajlásnak *(elastic buckling),* utóbbit plasztikus kihajlásnak *(plastic buckling).* Ha azonban a tartó nem statikus, hanem csak rövid ideig tartó dinamikus terhelést kap, a statikus terhelésnél érvényesnél nagyobb terhelést is el tud viselni kihajlás nélkül. Ezt az esetet nevezzük dinamikus kihajlásnak *(dynamic buckling).* A következőekben csak az első kettővel foglalkozunk.

7.1. Rugalmas kihajlás

Azt a tartó tengelyével párhuzamosan ható nyomóerőt, amelynél a tartó elkezd kihajlani, törőerőnek nevezzük, és F_t-vel jelöljük. A kihajlás tehát az $F \geq F_t$ erők esetében történik meg. Vizsgáljuk most a határesetet, amikor $F = F_t$, azaz határozzuk meg a törőerőt. Ekkor a kihajlás infinitezimálisan kicsi, vagyis alkalmazhatjuk azt a közelítést, miszerint a kihajlott rúd tengely irányú hossza megegyezik a nem kihajlott tartó hosszával, ℓ-lel.

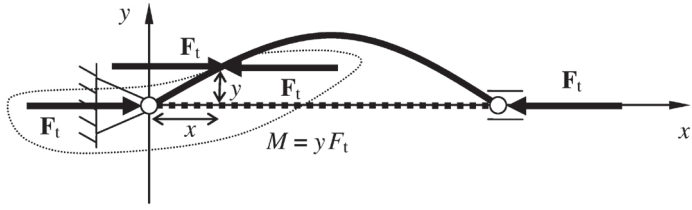
Általában négyféleképpen alakítják ki a kihajlásnak is kitett tartókat. Az 1. eset a mindkét végén csuklóval megfogott tartó, a 2. eset az egyik végén befogott, a másik végén szabadon elmozdulni tudó tartó, a 3. eset

az egyik végén befogott, a másik végén a tartó tengelyében elmozdulni képes csuklóval megfogott tartó, a 4. eset pedig a mindkét végén befogott tartó, amelynél az egyik befogás (szintén a tartó tengelyében) el tud mozdulni (39. ábra). Nézzük meg ezeket az eseteket egyesével.

39. ábra

7.1.1. Mindkét végén csuklóval rögzített tartó

Vegyünk egy két végén csuklóval befogott tartót úgy, hogy az egyik csukló a tartó tengelyében el tudjon mozdulni, és terheljük meg a tartót ezen a végén az F_t erővel, amelynek nagyságára kíváncsiak vagyunk (40. ábra).



40. ábra

Newton III. törvénye, azaz a statika IV. alaptétele szerint ekkor a tartó másik végén található csuklóban egy szintén F_t nagyságú, de ellentétes irányítottságú reakcióerő fog fellépni.

Vegyük fel a koordináta-rendszerünket a 40. ábrán látható módon: legyen az origó a fix csukló, és az x tengely essen egybe a tartó kihajlásmentes állapotában a tartó tengelyével. Jelöljük y-nal a tartó adott keresztmetszetének kihajlását. Milyen alakú lesz az $y(x)$ függvény?

A törőerő és az $y(x)$ függvénynek a meghatározásához először hajtsunk végre egy, a statikában megtanult erőáthelyezést, azaz adjunk hozzá a rendszerhez a vizsgált K keresztmetszetben egy egyensúlyi erőrendszert:

egy x tengellyel párhuzamos, nulla karú F_t alapú erőpárt. Ekkor az origóbeli F_t erő és az erőpár negatív irányú tagja egy

(321) $$M_x = y F_t$$

nagyságú forgatónyomatékot képvisel. Ez és az erőpár pozitív tagja hat a K keresztmetszetre.

Ez alapján felírhatjuk a rugalmas szál differenciálegyenletét:

(322) $$\frac{1}{R} = -\frac{M_x}{I E} = y''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

Behelyettesítve (321)-et és átrendezve kapjuk:

(323) $$y''(x) + \frac{F_t}{I E} y(x) = 0$$

Vezessük be a

(324) $$\gamma^2 = \frac{F_t}{I E}$$

jelölést. Ezzel a (323) egyenletet a következő alakban írhatjuk:

(325) $$y''(x) + \gamma^2 y(x) = 0$$

ami egy állandó együtthatójú homogén lineáris másodrendű differenciálegyenlet. Ennek általános megoldása:

(326) $$y(x) = A\sin(\gamma x) + B\cos(\gamma x)$$

ahol az A és a B együtthatók értékeit a határfeltételekből tudjuk meghatározni. Mik ezek a határfeltételek, mit tudunk a kihajló tartóról?

Tudjuk, hogy az origóban, azaz az $x = 0$ helyen a kihajlás értéke nulla, vagyis $y(0) = 0$. Ezt beírva a (326)-ba megkapjuk B értékét:

(327) $$0 = y(0) = A\sin(\gamma 0) + B\cos(\gamma 0) = A\sin(0) + B\cos(0) = 0\,A + B$$

azaz $B = 0$. Ez azt jelenti, hogy a kihajlott tartó alakja szinuszgörbe:

(328) $$y(x) = A\sin(\gamma x)$$

Tudjuk még azt is, hogy a tartó másik végén, az $x = \ell$ helyen a kihajlás értéke szintén nulla, azaz $y(\ell) = 0$. Ezt és a B-re kapott eredményünket is behelyettesítve a (326) egyenletbe:

(329) $$0 = y(\ell) = A\sin(\gamma\,\ell) + 0\cos(\gamma\,\ell) = A\sin(\gamma\,\ell)$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla. Ez a (329) esetében jelentheti egyrészt azt, hogy $A = 0$. Ez a triviális megoldás, ami azt az esetet írja le, amikor nincs kihajlás, hiszen amikor $A = B = 0$, akkor $y(x) = 0$.

A (329) egyenlet másik megoldása az $x = \ell$ helyen levő csuklóra, amikor $\sin(\gamma\,\ell) = 0$. Ennek az egyszerű trigonometrikus egyenletnek a megoldása:

(330) $$\gamma\,\ell = k\,\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

Mivel a tapasztalat azt mutatja, hogy a 40. ábra szerint befogott tartó csak egy irányba hajlik ki, azaz alakja egy fél szinuszgörbe, elegendő a $\gamma\,\ell = \pi$ esettel foglalkoznunk. Innen γ-t kifejezve, négyzetre emelve (ezt megtehetjük, hiszen minden paraméter értéke pozitív) és visszahelyettesítve a (324) egyenletbe:

(331) $$\frac{F_t}{I\,E}\,\ell^2 = \pi^2$$

Rendezve az egyenletet F_t-re, kapjuk:

(332) $$F_t = \pi^2\,\frac{I\,E}{\ell^2}$$

Egy keresztmetszetnek azonban végtelen sok, tengelyre vett másodrendű nyomatéka van, melyiket kell ide beírni az I helyére? Természetesen a legkisebb értékűt, hiszen arra lesz F_t értéke minimális. Nem azt az erőértéket keressük ugyanis, amely esetében a kihajlás már bármelyik tengelyre bekövetkezhet, hanem azt, amelyik esetében már egy tengely mentén megtörténik. A kihajlás pedig arra a tengelyre merőlegesen történik meg, amelyikre a másodrendű nyomaték minimális. Behelyettesítendő tehát az $I = I_{min}$ érték, ez fogja megadni azt a legkisebb erőértéket, amelynél a kihajlás már bekövetkezik, azaz a törőerőt:

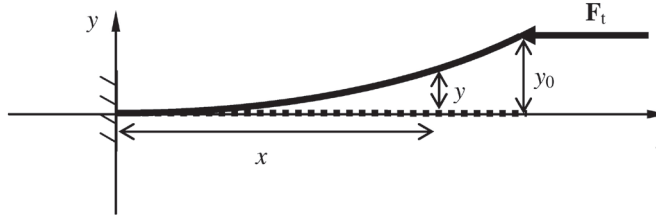
(333) $$F_t = \pi^2\,\frac{I_{min}E}{\ell^2}$$

Itt azonban a levezetés az 1. esetre, a 40. ábra szerinti, két végén csuklóval befogott tartóra történt, ahol a kihajlott tartó alakja egy félperiódusnyi szinuszgörbe. Azonban a további három esetben más és más a befogás jellege, ezért más lesz a tartó kihajlás utáni alakja, és így a törőerő is.

7.1.2. Egyik végén befogott, másik végén szabad tartó

A második esetben, az egyik végén befogott, másik végén szabadon elmozdulni képes tartó esetében (41. ábra), ha a tartó szabad végének elmozdulását y_0-lal jelöljük, a befogástól x távolságra a forgatónyomaték értékét szintén erőáthelyezéssel meghatározva kapjuk, hogy

(334) $$M_x = F_t(y_0 - y)$$



41. ábra

A rugalmas szál differenciálegyenlete:

(335) $$y''(x) + \frac{F_t}{IE} y(x) = \frac{F_t}{IE} y_0$$

Az inhomogén differenciálegyenleten itt is elvégezve a (324) szerinti helyettesítést, megoldását az

(336) $$y(x) = A\sin(\gamma x) + B\cos(\gamma x) + y_0$$

alakban kereshetjük. Az első határfeltétel: a tartó a befogásnál nem hajlik ki, azaz $y(x) = 0$, amelyből $B = -y_0$. A második határfeltétel: mivel a tartó egyik vége befogott, a befogás közvetlen közelében a kihajlás során sem deformálódhat, azaz ott mindig a befogásra merőlegesnek kell lennie. Matematikailag ez azt jelenti, hogy a befogásnál az érintőjének meredeksége nulla: $y'(0) = 0$, amelyet beírva a (336) egyenlet mindkét oldalának deriválásával kapott

(337) $$y'(x) = A\gamma\cos(\gamma x) - B\gamma\sin(\gamma x)$$

egyenlet bal oldalába megkapjuk az $A = 0$ eredményt. Ezt és a B-re kapott eredményünket beírva a (336) egyenletbe megkapjuk a kihajlott tartó alakját is:

(338) $$y(x) = y_0\left(1 - \cos(\gamma x)\right)$$

Felhasználva, hogy a tartó végének pont y_0 a kihajlása, azaz $y(\ell) = y_0$:

(339) $$y_0 = y_0\left(1 - \cos(\gamma \ell)\right)$$

amelyből azt kapjuk, hogy $y_0 \cos(\gamma \ell) = 0$. Az $y_0 = 0$ eset a triviális megoldás, amikor nincs kihajlás. A fizikai megoldást a $\cos(\gamma \ell) = 0$ eset írja le, ahonnan

(340) $$\gamma \ell = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

amelyekből a $k = 0$ esetet kell figyelembe venni, hiszen a kihajlott tartó alakja a tapasztalat szerint egy negyedperiódusnyi (ko)szinuszgörbe lesz, nem lesz „hullámos”. Innen

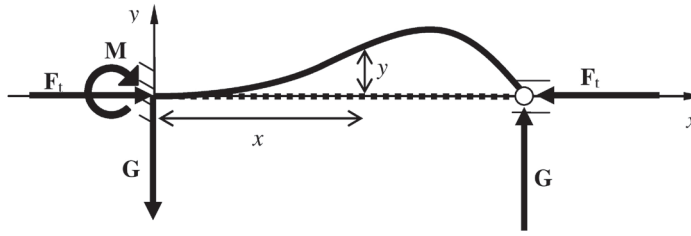
(341) $$\frac{F_\mathrm{t}}{I\,E}\,\ell^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

amelyet rendezve és I helyére a keresztmetszet legkisebb, tengelyre vonatkoztatott másodrendű nyomatékát, $I_{\min}$-t behelyettesítve megkapjuk a törőerő értékét:

(342) $$F_\mathrm{t} = \pi^2\,\frac{I_{\min} E}{4\,\ell^2}$$

7.1.3. Egyik végén befogott, másik végén csuklóval rögzített tartó

A harmadik esetnél, amikor a tartó egyik vége befogott, a másik vége csuklós rögzítésű úgy, hogy a csukló a tartó tengelyében tud csak elmozdulni (42. ábra), a befogott végen egy forgatónyomaték is kompenzálódik. Ez a csuklós vég oldalirányú elmozdulásának hiánya miatt lép fel, a 7.1.1. alfejezetbeli esetnél a csuklók körüli elfordulás lehetősége miatt, a 7.1.2. alfejezetbeli esetnél pedig a szabad vég y tengely menti szabad elmozdulási lehetősége miatt nem jelenik meg.



42. ábra

Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy legyen a tartó tengelyével párhuzamos az x tengely, az erre merőleges pedig az y tengely, az origó pedig legyen a befogási pontnál. Jelöljük a csuklónál fellépő y irányú erőt **G**-vel (amelynek reakcióereje a befogásnál lép fel). Ennek az $M = G\,(\ell - x)$ forgatónyomatéka is fel fog lépni a tartó egy, az origótól x távolságra levő keresztmetszetén az $\mathbf{F}_t$ erő itt fellépő $y\,F_t$ nagyságú forgatónyomatéka mellett:

(343) $$M_x = y\,F_t - G\left(\ell - x\right)$$

Ezzel a rugalmas szál differenciálegyenlete

(344) $$y''\left(x\right) + \frac{F_t}{I\,E}\,y\left(x\right) = \frac{G}{I\,E}\left(\ell - x\right)$$

A megoldást ismét a (324) szerinti helyettesítés elvégzése után az

(345) $$y\left(x\right) = A\sin\left(\gamma\,x\right) + B\cos\left(\gamma\,x\right) + \frac{F_t}{G}\left(\ell - x\right)$$

alakban keressük. Mivel a tartónak az origóban, ahol $x = 0$, az y irányú elmozdulása nulla, az első határfeltétel $y(0) = 0$. Ezt behelyettesítve a (345) egyenletbe és azt megoldva kapjuk, hogy $B = \ell F_t/G$. A második határfeltétel a 7.1.2. alfejezetbeli esethez hasonlóan az origóbeli befogás tényéből következik: a tartó itt nemcsak elmozdulni, de elfordulni sem tud, azaz a befogásra biztosan merőlegesen indul, vagyis az alakját leíró görbe érintője az origóban biztosan nulla lesz: $y'(0) = 0$. Ezt és a B-re kapott eredményt beírva a (345) egyenlet mindkét oldalának egyszeri deriválásával kapott

(346) $$y'\left(x\right) = A\,\gamma\cos\left(\gamma\,x\right) - B\,\gamma\sin\left(\gamma\,x\right) + \frac{F_t}{G}$$

egyenletbe, kapjuk, hogy $A = F_t/(G\,\gamma)$. Innen a kihajlott tartó alakja:

(347) $$y(x)=\frac{F_t}{G\gamma}\left(\sin(\gamma x)-\gamma\ell\cos(\gamma x)+\gamma(\ell-x)\right)$$

Felhasználva, hogy a tartó csuklóval rögzített vége nem tud elmozdulni oldalirányban, azaz $y(\ell) = 0$, a (347) alakja a következő lesz (mivel $F_t \neq 0$):

(348) $$0=\frac{F_t}{G\gamma}\left(\sin(\gamma\ell)-\gamma\ell\cos(\gamma\ell)+\gamma(\ell-\ell)\right)$$

(349) $$\gamma\ell\cos(\gamma\ell)=\sin(\gamma\ell)$$

(350) $$\operatorname{tg}(\gamma\ell)=\gamma\ell$$

Az egyenletnek tehát azok a megoldásai, ahol a tangensfüggvény értéke megegyezik argumentumának értékével, vagyis ahol a tangensfüggvény metszi az 1 meredekségű $y = x$ egyenest. A $\gamma\ell = 0$ eset megoldás ugyan, amely azonban vagy az $\ell = 0$ esetben lehetséges, de 0 hossz esetén nincs tartó, vagy a $\gamma = 0$ esetben, amely azonban azt jelentené, hogy $F_t = 0$, azaz nincs terhelő erő. Ez tehát a triviális megoldás, amikor nincs kihajlás. Ezért a (350) legkisebb pozitív megoldását keressük: pozitívat, hiszen sem az ℓ, sem a γ nem lehet negatív, és a legkisebbet, ugyanis azt várjuk, hogy egynél több „hullám” nem jelenik meg a kihajlott tartón (hiszen a tapasztalat ezt mutatja). Ez a megoldás a $\gamma\ell \approx 4{,}49$ numerikus értéknél van. Leosztva ℓ-lel, négyzetre emelve és visszahelyettesítve a (324)-be kapjuk:

(351) $$\frac{20{,}19}{\ell^2}\approx\frac{F_t}{IE}$$

ahonnan a törőerő:

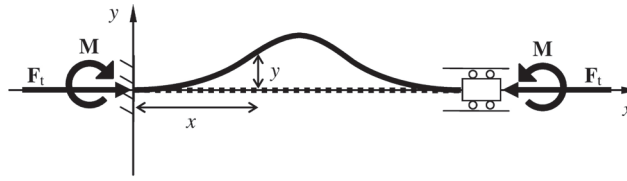
(352) $$F_t\approx\frac{20{,}19\,I_{\min}E}{\ell^2}$$

7.1.4. Mindkét végén befogott tartó

A negyedik esetben, amikor a tartó mindkét vége befogott, de az egyik befogási pont a tartó hossztengelyében el tud mozdulni (43. ábra). A tartó egy keresztmetszetében fellépő forgatónyomaték egyrészt a törőerő áthelyezéséből származó yF_t tag, másrészt a tartó mindkét végi befogása miatt gátolt elfordulása miatt fellépő ismeretlen nagyságú, de yF_t-vel ellentétes

irányú M forgatónyomaték, azaz az egyik befogástól x távolságra a keresztmetszeten fellépő teljes forgatónyomaték:

(353) $$M_x = -M + yF_t$$



43. ábra

A rugalmas szál differenciálegyenlete:

(354) $$y''(x) + \frac{F_t}{IE}\, y(x) = \frac{M}{IE}$$

A megoldást a (324) szerinti helyettesítés elvégzése után az

(355) $$y(x) = A\sin(\gamma x) + B\cos(\gamma x) + \frac{M}{F_t}$$

alakban kereshetjük. Az első határfeltétel ismét az egyik befogásnál, $x = 0$-nál való $y = 0$ elmozdulás kihasználása, azaz $y(0) = 0$. Ezt beírva a (355) egyenletbe megkapjuk B értékét: $B = -M/F_t$. Ugyanitt a befogás miatt a tartó görbülete nulla, azaz $y'(0) = 0$, ez a második határfeltétel. Ezt és a B már megkapott értékét behelyettesítve a (355) deriváltjába:

(356) $$y'(x) = A\gamma\cos(\gamma x) - B\gamma\sin(\gamma x)$$

megkapjuk A értékét: $A = 0$, azaz a kihajlott tartó alakja

(357) $$y(x) = -\frac{M}{F_t}\cos(\gamma x) + \frac{M}{F_t}$$

(358) $$y(x) = \frac{M}{F_t}\left(1 - \cos(\gamma x)\right)$$

Felhasználva, hogy a tartó másik végén, $x = \ell$-nél szintén nem mozdul el a tartó, azaz $y(\ell) = 0$, a (358) alakja

(359) $$0 = \frac{M}{F_t}\left(1 - \cos(\gamma \ell)\right)$$

lesz. Mivel $M \neq 0$, ezért a (359) egyenlet jobb oldalán a szorzat csak akkor lehet nulla, ha

(360) $$\cos(\gamma \ell) = 1$$

amelynek megoldásai:

(361) $$\gamma \ell = 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

A $k = 0$ megoldás esetében vagy az $\ell = 0$, vagy a $\gamma = 0$ eredményt kapjuk. Az első azt jelentené, hogy nincs tartó, a második, hogy $F_t = 0$, vagyis nincs terhelő erő, így ez a triviális megoldás, amikor nincs kihajlás. A $k = 1$ esetben

(362) $$\gamma \ell = 2\pi$$

ahonnan kifejezve γ-t, négyzetre emelve és visszahelyettesítve a (324)-be és F_t-re rendezve megkapjuk a törőerőt:

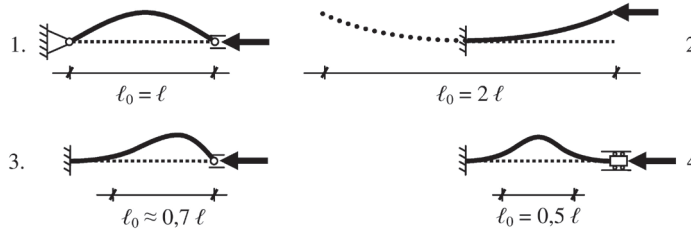
(363) $$F_t = \pi^2 \frac{4 I_{min} E}{\ell^2}$$

7.1.5. A kihajló hossz

Összehasonlítva a (333), (342), (352) és (363) egyenletek által meghatározott törőerők nagyságát a négy esetre, azt látjuk, hogy egy konstans szorzótól eltekintve mindnek az alakja azonos. A 3. eset kivételnek tűnik, mivel nem szerepel benne π^2, de a 20,19-es szorzót átalakíthatjuk az ezzel majdnem pontosan megegyező (a valódi értéktől csak 2%-kal eltérő) $2\pi^2$ alakra. Ezzel most már valóban mindegyikben csak egy konstans szorzó az eltérés, amelyet jelöljünk K^2-tel:

(364) $$F_t = \pi^2 \frac{I_{min} E}{K^2 \ell^2}$$

így K értéke a négy esetben rendre 1, 2, $1/\sqrt{2}$ és 0,5. Az $1/\sqrt{2}$-t szokták 0,7-re kerekíteni. Ezek rúdhosszba való „beolvasztásával" bevezethetjük az úgynevezett kihajló hosszat *(effective length):* $\ell_0 = K\ell$ (44. ábra), amely fizikailag a kihajolt tartót leíró görbe két inflexiós pontja közötti távolságot jelenti (ezekben a keresztmetszetekben a hajlítónyomaték nulla).



44. ábra

A (364)-be behelyettesítve a kihajló hosszat a törőerő képletére az

(365) $$F_{\mathrm{t}} = \pi^2 \frac{I_{\min} E}{\ell_0^2}$$

összefüggést kapjuk, amelyet Euler-képletnek[5] nevezünk, mivel elsőként Leonhard Euler vezette le 1757-ben. Ebből adott A keresztmetszetű tartó esetén a törőfeszültség számolható:

(366) $$\sigma_{\mathrm{t}} = \pi^2 \frac{I_{\min} E}{A\,\ell_0^2}$$

Gondoljuk át a következőt: hogyan változik a törőfeszültség nagysága, ha a keresztmetszet felületét, A-t változatlanul tartva körlap keresztmetszetről egyre növekvő átmérőjű körgyűrű alakú keresztmetszetekre térünk át?

A (366) kifejezésben a másodrendű nyomatékon kívül minden konstans, I pedig kör és körgyűrű keresztmetszet esetén minden tengelyre azonos. Egységnyi keresztmetszetű ($A = 1$) körgyűrű alakú tartó esetében a külső átmérő (D) függvényében a belső átmérő (d) a

(367) $$d = \sqrt{\frac{D^2\pi - 4}{\pi}}$$

kifejezéssel számolható (mivel $R^2\pi - r^2\pi = 1$ és $D = 2R$, valamint $d = 2r$), amelynek felhasználásával a másodrendű nyomaték

(368) $$I = \frac{\pi D^2 - 2}{8\pi}$$

[5] Leonhard Euler (1707–1783), svájci matematikus, fizikus, csillagász, logikus, mérnök.

Vagyis a másodrendű nyomaték és így a törőfeszültség is a külső átmérő négyzetével arányosan növekszik. Ugyanannyi anyagból tehát kör helyett körgyűrű keresztmetszetű tartót készítve a kihajlás csak nagyobb feszültségnél következik be.

Mivel a (365) alapján meghatározott törőerőnél a tartó már éppen elkezd kihajolni, ezért a gyakorlatban az ennél kisebb, úgynevezett megengedett erőt használjuk, amely a törőerőnek és egy *b* biztonsági tényezőnek (*factor of safety* vagy *safety factor*) a hányadosa:

(369) $$F_{\text{meg}} = \frac{F_{\text{t}}}{b}$$

A törőerő vagy a megengedett erő ismeretében elemi módon számolható a törőfeszültség és a megengedett feszültség:

(370) $$\sigma_{\text{meg}} = \frac{F_{\text{meg}}}{A} = \frac{\sigma_{\text{t}}}{b} = \frac{F_{\text{t}}}{Ab}$$

ahol *A* a tartó keresztmetszete.

A másodrendű nyomatékot felírhatjuk a tartó keresztmetszete és az inerciasugár (*i*) segítségével [lásd a 3.9. alfejezetben a (169) összefüggést]:

(371) $$I = Ai^2$$

(372) $$I_{\text{min}} = Ai_{\text{min}}^2$$

ahonnan az inerciasugarat kifejezve

(373) $$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

(374) $$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{I_{\text{min}}}{A}}$$

és ezzel a törőfeszültség

(375) $$\sigma_{\text{t}} = \frac{\pi^2 E i_{\text{min}}^2}{\ell_0^2}$$

Vezessük be a karcsúsági tényezőt (λ) *(slenderness ratio),* amely a rúd zömökségének, illetve karcsúságának mérőszáma:

(376) $$\lambda = \frac{\ell_0}{i_{\min}}$$

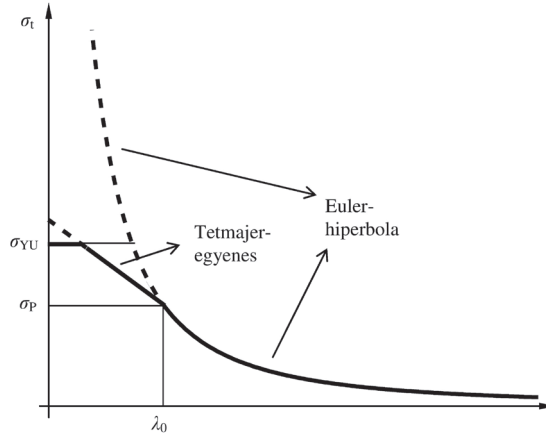
A karcsúsági tényezővel kifejezve a törőfeszültséget:

(377) $$\sigma_t = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E$$

A törőfeszültség tehát csak a tartó anyagától, valamint hosszának és keresztmetszetének arányától függ, amelyeket a Young-modulusz és a karcsúsági tényezők írnak le. Mivel egy adott anyagra a Young-modulusz értéke konstans, ezért azt látjuk a (376) és a (377) kifejezések alapján, hogy a törőfeszültség a karcsúsági tényező négyzetével fordítottan arányos. Ezt a görbét Euler-hiperbolának nevezzük.

7.2. Plasztikus kihajlás

Mint az előző alfejezetben említettük, a rugalmas kihajlás akkor következik be, amikor a feszültség még nem éri el a rugalmassági határt (σ_E), ezért az Euler-képlet csak abban az esetben alkalmazható az adott tartóra, ha arra a karcsúsági tényező nagyobb egy, az adott anyagra meghatározott λ_0 értéknél (45. ábra).



45. ábra

Ennél zömökebb rudak esetében a már kihajlást okozó feszültség nem az arányossági határon belül van, hanem σ_P és a folyáshatár (σ_{YU}) között. Ebben a tartományban a törőfeszültség a karcsúsági tényezőnek lineáris függvénye. Ezt az összefüggést először a felvidéki Korompán született Ludwig von Tetmajer (Tetmajer Lajos, 1850–1905), a zürichi Szövetségi Politechnikai Intézet (ma Szövetségi Műszaki Főiskola, Eidgenössische Technische Hochschule, ETH) professzora mérte ki.

A folyáshatárt elérve bármekkora a karcsúsági tényező, nem történik kihajlás, mivel a tartó anyaga megfolyik.

8. Egyirányú összetett igénybevételek

Egyszerű igénybevételeknél a szerkezetre csak egyféle igénybevétel hat, amelynek hatására felléphet normális (**σ**) vagy csúsztatófeszültség (**τ**), de mindig csak egyféle. Ha azonban kétféle igénybevételnek van a szerkezet kitéve, akkor a két egyszerű igénybevétel hatására fellépő két feszültség lehet azonos típusú vagy különböző.

Ha mindkét feszültség normális feszültség vagy mindkettő csúsztatófeszültség, akkor egyirányú összetett igénybevételről beszélünk. Ebben az esetben az egyes igénybevételek által létrehozott feszültségek egyszerűen összeadhatóak.

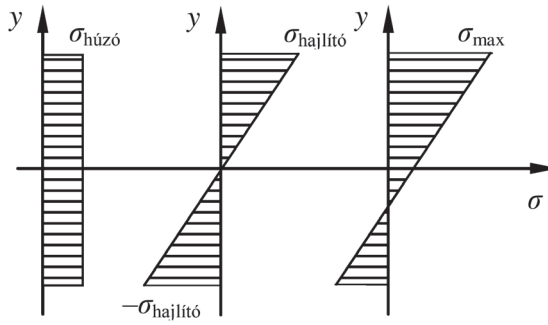
Ilyen igénybevételek a húzás (nyomás) és hajlítás (**σ**–**σ**) és a nyírás és csavarás (**τ**–**τ**). Mivel az egyidejű nyírás és csavarás esete más, nagyobb hatású igénybevétel nélkül csak nagyon ritkán fordul elő, ezért csak a húzás/nyomás és hajlítás leírásával foglalkozunk a továbbiakban.

Ahogy a 2.2. alfejezetben láttuk, a húzásból (nyomásból) származó feszültség merőleges a keresztmetszetre, amelyre a húzó(nyomó)erő hat. Hasonlóan, a tiszta hajlításból eredő feszültség is (mivel a hajlítást előidéző forgatónyomaték felfogható egy keresztmetszetre merőleges erőpárként is) merőleges a keresztmetszetre (3. fejezet). Ezért az egyes síkokban fellépő összfeszültség egyszerűen a (22) és (58) egyenletekből az adott rétegre számított feszültségértékek előjeles összegeként áll elő.

Mivel mind a húzásból, mind a hajlításból származó feszültségek lehetnek pozitív és negatív előjelűek is, a maximális feszültség nagyságát ezek abszolút értékeinek összegeként kapjuk:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\text{húzó,max}}| + |\sigma_{\text{hajlító, max}}| = \frac{F}{A} + \frac{M}{I}e \tag{378}$$

A feszültségeloszlás tehát a 46. ábrán látható módon alakul.



46. ábra

A húzásra (nyomásra) és hajlításra igénybe vett tartó méretezése a maximális feszültség és a megengedett feszültség figyelembevételével történik:

(379) $$\sigma_{\max} \overset{!}{\leq} \sigma_{\text{meg}}$$

8.1. A semleges réteg meghatározása

Hol lesz az a sík, ahol az összfeszültség nulla? Ennek meghatározása egyszerűen a (22) és (58) egyenleteknek, a húzásból és hajlításból származó feszültségjárulékok összegének nullává tételével történik:

(380) $$\sigma = \sigma_{\text{húzó}} + \sigma_{\text{hajlító}} = \frac{F}{A} + \frac{M}{I} y_0 = 0$$

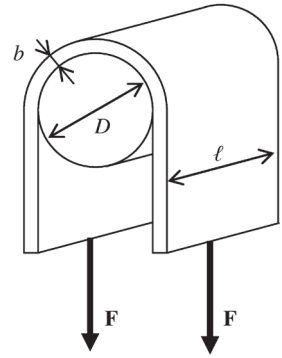
Az egyenletet y_0-ra rendezve kapjuk:

(381) $$y_0 = -\frac{F\,I}{A\,M}$$

amely a semleges rétegnek a súlyponti tengelytől mért távolságát adja meg, ha az y tengely iránya az ellentétes előjelű húzó- és hajlítófeszültségű rétegek felől az azonos előjelűek irányába mutat.

8.2. Hengeren átvetett szíj

Vegyünk egy D átmérőjű hengeren átvetett ℓ szélességű és b vastagságú rugalmas szíjat, amelyet mindkét lelógó végén egy-egy **F** erő terhel (47. ábra). A szíj mekkora vastagságánál lesz a rá ható feszültség a legkisebb?



47. ábra

A szíj hengerre felfekvő részének igénybevétele húzás és hajlítás, ami egy egyirányú összetett igénybevétel. A (378) alapján tehát a szíjban fellépő maximális feszültség

(382) $$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{M}{I}\frac{b}{2}$$

ahol $A = b\,\ell$ a szíj keresztmetszete.

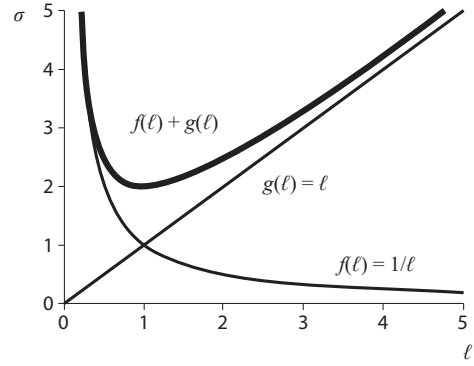
Vékony szíj (azaz $b \ll D$) esetén a szíj R görbületi sugara a henger átmérőjének felével közelíthető: $R \approx D/2$

Az (56) összefüggést felhasználva tehát

(383) $$\frac{M}{IE} = \frac{1}{R} = \frac{2}{D}$$

amelyből az M/I arányt kifejezve és (382)-be visszaírva (és az $A = b\,\ell$ helyettesítést elvégezve) a maximális feszültség a szíj b vastagságának függvényében:

(384) $$\sigma_{\max}(b) = \frac{F}{b\,\ell} + \frac{2E}{D}\frac{b}{2} = \frac{F}{b\,\ell} + \frac{bE}{D}$$



48. ábra

Azt kaptuk tehát, hogy a maximális feszültség a *b* szíjvastagság két függvényének összege: annak első és mínusz egyedik hatványának összegével arányos. Az ilyen függvénynek (kvalitatív menetét lásd a 48. ábrán) egy minimuma van, amely a

(385) $$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\max}(b)}{\mathrm{d}b} = 0$$

egyenlet megoldásával megkapható:

(386) $$-\frac{F}{b\,\ell} + \frac{E}{D} = 0$$

(387) $$b = \sqrt{\frac{F\,D}{E\,\ell}}$$

A minimális feszültséget eredményező szíjvastagság tehát a terhelő erő, a henger átmérője, a szíj anyagának Young-modulusza és a szíj szélessége ismeretében meghatározható.

8.3. Külpontos húzás vagy nyomás

Vegyünk egy keresztmetszetet, amelyre egy **F** húzó- vagy nyomóerő hat, a tartó tengelyével párhuzamosan, de nem a keresztmetszet súlypontjában,

hanem attól (példánkban az y tengely mentén) h távolságra. Ezt a terhelést külpontos húzásnak (nyomásnak) nevezzük, és szintén egyirányú összetett igénybevétel, hiszen az erő hatása felírható egy, a keresztmetszet tengelyében történő húzás és egy tiszta hajlítás összegeként.

Adjunk hozzá a rendszerhez egy egyensúlyi erőrendszert, egy nulla karú, **F** alapú erőpárt a keresztmetszet tengelyében. Látható, hogy ekkor a keresztmetszetre minden pontjában hat egy $\sigma_{\text{húzó}} = F/A$ nagyságú húzófeszültség, és a keresztmetszet tengelyétől való távolság függvényében az egyes rétegekre egy $\sigma_{\text{hajlító}} = M\,y/I = F\,h\,y/I$ nagyságú hajlítófeszültség hat.

A két feszültséget összeadva megkapjuk az egyes rétegekre ható feszültség nagyságát:

$$\sigma = \sigma_{\text{húzó}} + \sigma_{\text{hajlító}} = \frac{F}{A} + \frac{F\,h}{I}\,y \tag{388}$$

A semleges réteg pozíciójának meghatározásához tegyük a (388) kifejezést egyenlővé nullával, és fejezzük ki y_0-t:

$$y_0 = -\frac{F\,I}{F\,A\,h} = -\frac{I}{A\,h} \tag{389}$$

8.4. Magidom

A (389) függvény azonban adott keresztmetszetre nem korlátos: a h paraméter csökkentésével y_0 előbb-utóbb nagyobb lesz, mint az adott irányban a keresztmetszet szélső szálának távolsága. Ha ennél a h_0 távolságnál közelebb hat a terhelő erő a keresztmetszet tengelyéhez, akkor a keresztmetszetre vagy csak pozitív, vagy csak negatív feszültség hat az **F** erő irányítottságától függően.

Az y_0 értékét minden tengely mentén egyenlővé téve a szélső szál távolságával, majd így meghatározva a h_0 értékét és ezeket ábrázolva a keresztmetszeten egy olyan síkidomot kapunk, amelyen ha belül hat a terhelő **F** erő, akkor a keresztmetszeten fellépő feszültségek azonos előjelűek lesznek. Ezt a síkidomot az adott keresztmetszet magidomának nevezzük.

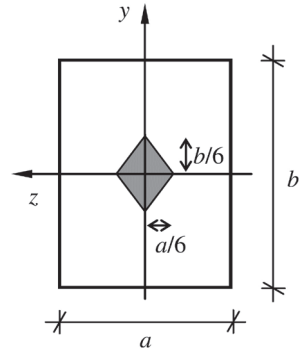
Vegyük észre, hogy a (389) kifejezés alapján y_0 nem függ az **F** erő nagyságától, csak a keresztmetszet másodrendű nyomatékától, felületének nagyságától és az **F** erő támadáspontjának helyzetétől. A magidom alakja és nagysága tehát a keresztmetszet inherens tulajdonsága.

A 49. ábrán látható téglalap alakú keresztmetszet z tengelyre vett másodrendű nyomatékát a (78) alapján ismerjük, a keresztmetszet területe ab, a szélső szál távolsága pedig, amikor a z tengely a hajlítás tengelye, $b/2$. Ezeket az értékeket a (402)-be beírva, majd h_0-ra rendezve (és az előjeleket mindenütt pozitívnak véve, hiszen az elrendezés szimmetrikus, a tengely negatív irányában azonos nagyságú, csak ellentétes előjelű értéket kapnánk h_0-ra):

(390)
$$\frac{b}{2} = \frac{\frac{ab^3}{12}}{a\,b\,h_0}$$

(391)
$$h_{0,\text{téglalap},z} = \frac{b}{6}$$

Hasonlóan az y tengelyre $h_{0,\text{téglalap},y} = a/6$. A magidom a 49. ábrán szürkével van jelölve.



49. ábra

Kör keresztmetszet esetében minden tengely ekvivalens, vagyis a magidom is kör lesz. A (389)-be beírva a szélső szál távolságát, amely a körlap sugara, $R = D/2$, a körlap területét, amely $D^2\pi/4$ és a (85) alapján a másodrendű nyomatékot, h_0-ra rendezve megkapjuk a magidom sugarát:

(392)
$$\frac{D}{2}=\frac{\frac{D^4\pi}{64}}{\frac{D^2\pi}{4}h_0}$$

(393)
$$h_{0,\text{kör}}=\frac{D}{8}$$

Körgyűrű keresztmetszet esetében a magidom szintén kör a keresztmetszet forgásszimmetriája miatt. A szélső szál távolsága továbbra is a körgyűrű külső sugara, $R = D/2$, de a terület $(D^2 - d^2)\,\pi / 4$, ahol $r = d/2$, a körgyűrű belső sugara. A másodrendű nyomaték a (88) kifejezés alapján írható be a (389) egyenletbe, amelyet h_0-ra rendezve a magidom sugarát kapjuk meg:

(394)
$$\frac{D}{2}=\frac{\frac{\left(D^4-d^4\right)\pi}{64}}{\frac{\left(D^2-d^2\right)\pi}{4}h_0}$$

(395)
$$h_{0,\text{körgyűrű}}=\frac{D}{8}\left(1+\left(\frac{d}{D}\right)^2\right)=h_{0,\text{kör}}+\frac{d^2}{8D}=h_{0,\text{kör}}+\frac{r^2}{4R}$$

Mikor fog a magidom teljes egészében a körgyűrű lyukas belsejébe esni, azaz mikor lesz $h_0 \le r$? Ehhez a

(396)
$$h_{0,\text{körgyűrű}}=\frac{R}{4}+\frac{r^2}{4R}\le r$$

egyenlőtlenséget kell megoldani. Mivel bennünket most csak az egyenlőtlenség fizikai megoldásai érdekelnek, szorítkozzunk az $r > 0$ és $R > 0$ eset megoldásainak keresésére. Megoldva az egyenlőtlenséget R-re és r-re kapjuk:

(397)
$$\left(2-\sqrt{3}\right)r\le R\le\left(2+\sqrt{3}\right)r$$

(398)
$$\left(2-\sqrt{3}\right)R\le r\le\left(2+\sqrt{3}\right)R$$

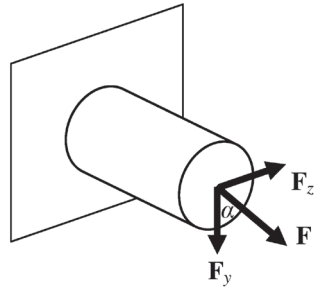
Felhasználva, hogy $R > r$, kapjuk, hogy az

(399)
$$R\le\left(2+\sqrt{3}\right)r\quad\text{és}\quad r\ge\left(2-\sqrt{3}\right)R$$

feltételeknél esik a körgyűrű egész magidoma a körgyűrű lyukas részébe.

8.5. Ferde hajlítás

Külpontos húzás (nyomás) esetében a tartó egy keresztmetszetére ható erő nem a tartó súlypontjában hatott, de a tartó tengelyével párhuzamos volt. Ha az erő a tartó súlypontjában hat, de iránya nem párhuzamos a tartó tengelyével, hanem arra merőleges, ferde hajlításról beszélünk (50. ábra). Ha a hajlítóerő és a reakcióerője hatására fellépő forgatónyomaték vektora egybeesik a keresztmetszet egyik főtengelyével, akkor egyenes hajlításról beszélünk.



50. ábra

Vegyünk egy egyik végén befogott, ℓ hosszúságú tartót, amelyet a szabad végén (jelöljük ezt a keresztmetszetet K-val) egy **F** erő ferde hajlításra terhel. Jelöljük az **F** erő és az *y* tengely által bezárt szöget α-val, és bontsuk fel a terhelő erőt két merőleges komponensre: az egyik az *y* tengellyel legyen párhuzamos, a másik a *z* tengellyel. Ekkor

(400) $$F_y = F\cos(\alpha)$$

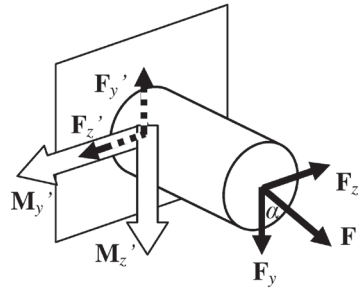
(401) $$F_z = F\sin(\alpha)$$

A két erő reakcióereje, amelyek nagysága azonos, de irányuk ellentétes $\mathbf{F}_y$-nal és $\mathbf{F}_z$-vel, a befogásnál ébred, jelöljük ezeket $\mathbf{F}_y'$-vel és $\mathbf{F}_z'$-vel ($\mathbf{F}_y' + \mathbf{F}_z' = \mathbf{F}'$). Az $\mathbf{F}_y$ és az $\mathbf{F}_z$ erő a K keresztmetszetet nyírásra terheli, míg az $\mathbf{F}_y\mathbf{F}_y'$ és az $\mathbf{F}_z\mathbf{F}_z'$ erőpárok (amelyek forgatónyomatékaival az $\mathbf{M}_y'$ és az $\mathbf{M}_z'$ reakció-forgatónyomatékok tartanak egyensúlyt) a tartót és így a K keresztmetszetet is hajlításra terhelik:

(402) $$M_y = \ell F_z = \ell F\sin(\alpha)$$

(403) $$M_z = \ell F_y = \ell F \cos(\alpha)$$

Az M_y és az M_z forgatónyomatékok felfoghatók úgy is, mint egy **M** forgatónyomaték két, adott tengely irányú komponense (51. ábra), amivel szintén a (402)–(403) egyenletekre jutunk.



51. ábra

A ferde hajlítást tehát visszavezettük két, az *y* és a *z* tengely körüli egyenes hajlításra. A (402) és (403) egyenletek mindkét oldalát négyzetre emelve és az így kapott egyenleteket összeadva:

(404) $$M_y^2 + M_z^2 = M^2\left(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right) = \ell^2 F^2\left(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)$$

Mivel $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, M^2, ℓ^2 és F^2 pedig pozitív, négyzetgyököt lehet vonni:

(405) $$M = \ell F$$

Az **M** vektor és a hajlítás tengelye merőleges a terhelés síkjára, azaz az **F** és az **F***'* síkjára. A K keresztmetszet egy d*A* felületelemén ébredő feszültség:

(406) $$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = \frac{\ell F \cos(\alpha)}{I_z} y + \frac{\ell F \sin(\alpha)}{I_y} z$$

A semleges tengely nem merőleges a terhelés síkjára. Jelöljük β-val a semleges tengely és az *y* tengely által közrezárt szöget. Ekkor

(407) $$\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta) = \frac{I_y^2}{I_z^2}$$

amelyből β már számítható.

Vákát oldal

9. Többirányú összetett igénybevételek

Ha egy testre kétfajta igénybevétel hat, és az egyik által létrehozott feszültség normális (**σ**), a másik által létrehozott feszültség pedig csúsztatófeszültség (**τ**), akkor többirányú összetett igénybevételről beszélünk.

Az egyirányú összetett igénybevételektől eltérően itt a két függetlenül kiszámolt feszültségérték nem adható egyszerűen össze, hiszen egymásra merőleges vektorokról beszélünk. A méretezés ezért itt további számolást igényel.

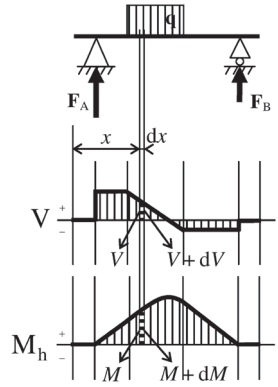
Az igénybevételek, amelyeknél különböző típusú feszültségek lépnek fel: a hajlítás és nyírás, a húzás (nyomás) és csavarás, a hajlítás és csavarás, valamint a húzás (nyomás) és nyírás. Ez utóbbi esettel nem foglalkozunk, mivel a legritkább esetben fordul elő, hogy az adott terhelés hatására csak ez a két igénybevétel lép fel, hajlítás nem (és ekkor a nyírás már elhanyagolható lesz).

9.1. Hajlítás és nyírás

Ahogy a 3.10. és a 4.1. alfejezetekben már említettük, ha egy szerkezetben található csak tiszta hajlításra vagy csak tiszta nyírásra terhelt tartó, annak léte inkább kivétel, mint szabály. A gyakorlatban általában a nyírásra terhelt tartó hajlításra is terhelve van, és fordítva. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a hajlítónyomaték nem állandó a tartó tengelye mentén.

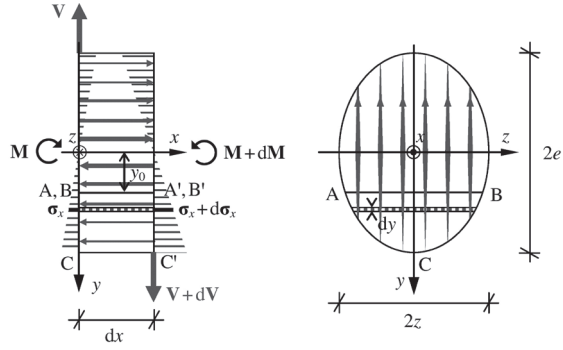
9.1.1. Hajlításra és nyírásra terhelt kéttámaszú tartó

Vizsgáljunk meg tehát egy ilyen, az 52. ábrán látható, hajlításra és nyírásra is terhelt kéttámaszú tartót (a hozzá tartozó kvalitatív nyíróerő- és hajlítónyomatéki ábrát felrajzoltuk).



52. ábra

Legyen az *xy* sík a tartó szimmetriasíkja (azaz az *y* tengely az egyes keresztmetszetek szimmetriatengelye), az *xy* sík legyen a terhelés síkja is, valamint a hajlítás tengelye legyen a *z* tengely. A keresztmetszet *z* tengellyel párhuzamos dimenziójáról megengedjük, hogy egy *z*(*y*) függvény szerint változzon. Válasszunk egy d*x* széles rúdelemet a tartó bal szélétől *x* távolságra. Ennek a rúdelemnek a két szélső lapján a hajlításból eredő **σ** feszültség is fellép, és a nyírásból eredő **τ** feszültségek is ébrednek, emellett (a csúsztatófeszültségek dualitása miatt) a tartó tengelyének irányában is fellépnek **τ** feszültségek. A rúdelemnek a bal oldali lapját terhelő nyíróerőt **V**-vel és az itt fellépő hajlítónyomatékot **M**-mel jelöljük, míg a jobb oldali, a tartó bal oldali végétől *x* + d*x* távolságra levő lapot terhelő nyíróerőt **V** + d**V**-vel, hajlítónyomatékot **M** + d**M**-mel jelöljük (53. ábra).



53. ábra

Tekintsük a rúdelem egy dx hosszúságú szakaszát. Válasszunk ki egy 2z szélességű, dy magasságú felületelemet a dx hosszúságú rúdelem bal oldali határoló keresztmetszetén, amelynek nagyságát jelöljük dA-val, az ezen fellépő normális feszültséget pedig jelöljük $\boldsymbol{\sigma}_x$-szel. Hasonlóan, a jobb oldali határoló keresztmetszetnek a tartó tengelye mentén dx távolsággal arrébb található, szintén dA nagyságú és a tartó állandó keresztmetszete miatt dA-val analóg helyen fellépő feszültséget jelöljük $\boldsymbol{\sigma}_x + \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}_x$-szel.

A keresztmetszet két, a hajlítás tengelyétől tetszőleges távolságban levő szakasza közti teljes fellépő normális feszültséget, például az $\overline{\mathrm{AB}}$ szakasz és a keresztmetszet széle, a C pont (azaz az xz síktól $+e$ távolságra levő réteg, ami jelen esetben egyetlen szál) közötti teljes σ_x-et az

(408) $$\int_{y_0}^{e} \sigma_x \,\mathrm{d}A$$

integrál segítségével számolhatjuk. Ez ekvivalens az ABC síkidomra ható erővel. A dx távolsággal arrébb levő keresztmetszeten, az analóg A'B'C' síkidomon fellépő normális feszültség nagyságát az

(409) $$\int_{y_0}^{e} \left(\sigma_x + \mathrm{d}\sigma_x\right)\mathrm{d}A$$

integrál adja meg.

Az ABA'B' térfogatelemen fellépő x irányú nyíróerők eredője a térfogatelemben fellépő, y irányú τ_{xy} és a térfogatelem 2 z dx térfogatának a szorzataként adható meg, hiszen ebben a nyírás síkjára merőleges térfogatelemben a nyírófeszültségek minden pontban azonosak. A csúsztatófeszültségek dualitása miatt azonban az ABA'B' térfogatelem minden pontjában egy τ_{xy}-nal azonos nagyságú, de rá merőleges irányú τ_{yx} feszültség is fellép. Felírva tehát a térfogatelemben fellépő csúsztatófeszültségek összegét:

(410) $$\tau_{\mathrm{ABA'B'}} = \tau\left(2\,z\right)\mathrm{d}x$$

Mivel egyensúlyt vizsgálunk, ezért a vízszintes irányú erők összegének nullának kell lennie. A dx rúdelem két határolólapján fellépő normális feszültségek különbségével az x irányú csúsztatófeszültségek tartanak egyensúlyt:

(411) $$\int_{y_0}^{e} \left(\sigma_x + \mathrm{d}\sigma_x\right)\mathrm{d}A - \int_{y_0}^{e} \sigma_x \,\mathrm{d}A - \tau_{xy}\left(2z\right)\mathrm{d}x = 0$$

Rendezve az egyenletet kapjuk:

$$\int_{y_0}^{e} \frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}A = \tau_{xy}\,(2z) \tag{412}$$

A hajlítás tengelyétől y távolságban levő szálakra a normális feszültség értéke a Navier-képlettel számolható (ahol I a teljes keresztmetszet másodrendű nyomatéka):

$$\sigma_x = \frac{M}{I}\,y \tag{413}$$

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\,\frac{y}{I} \tag{414}$$

Mivel a hajlítónyomaték hely szerinti deriváltja a nyíróerő, ezért a $V = \mathrm{d}M/\mathrm{d}x$ helyettesítést alkalmazva:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x}{\mathrm{d}x} = V\,\frac{y}{I} \tag{415}$$

Ezt behelyettesítve a (412)-be és a V/I tagot, mivel konstans, az integrálás elé kihozva:

$$\frac{V}{I}\int_{y_0}^{e} y\,\mathrm{d}A = \tau_{xy}\,(2z) \tag{416}$$

Az integrál nem más, mint az ABC síkidomnak a hajlítás tengelyére vett elsőrendű nyomatéka, azaz $S_{x,\mathrm{ABC}} = \int y\,\mathrm{d}A$:

$$\frac{V}{I}\,S_{x,\mathrm{ABC}} = \tau_{xy}\,(2z) \tag{417}$$

Innen a csúsztatófeszültséget kifejezve:

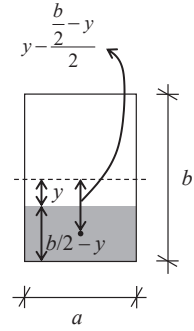
$$\tau_{xy} = \frac{V}{I}\,\frac{S_{x,\mathrm{ABC}}}{(2z)} \tag{418}$$

ahol $(2z)$-t, a keresztmetszet ABA'B' síkbeli méretét húsvastagságnak nevezzük. Bár ez az ABA'B'·dy térfogatelemben fellépő csúsztatófeszültségek nagysága, a csúsztatófeszültségek dualitása miatt ezzel a közelítő képlettel számíthatók ki a dx hosszúságú rúdelem határolólapjain az ott fellépő nyírófeszültségek is. Ez természetesen azt jelenti, hogy ott rétegről rétegre változik annak nagysága, és mivel a szélső szál esetében $S_x = 0$, ezért ott $\tau_{xy} = 0$.

A (418) képlettel kapcsolatban azonban három dolgot nem szabad elfelejteni. Az első, hogy ez, bár a tapasztalat szerint meglehetősen pontos, de mégiscsak egy közelítő képlet. A második, hogy a levezetés feltételezései miatt ez csak akkor érvényes, ha az y tengely a keresztmetszet szimmetriatengelye. A harmadik, hogy csak a nyírófeszültség y irányú komponensét adja meg. Mivel egy rúd felszínén csak érintőirányú feszültségek ébredhetnek, ezért ha a keresztmetszet oldalai nem párhuzamosak az y tengellyel (mint később látni fogjuk például kör keresztmetszetre), a teljes $\boldsymbol{\tau}_{xe} = \boldsymbol{\tau}_{xy} + \boldsymbol{\tau}_{yx}$ egy adott pontban az adott pontbeli érintő y tengelyhez képesti hajlásszögének ismeretében még meghatározandó.

9.1.1.1. Feszültségeloszlás téglalap keresztmetszet mentén

Határozzuk meg egy olyan téglalap keresztmetszetű tartóra a $\tau_{xe}(y)$ függvényt (54. ábra), amelynek z irányú mérete a, az y irányú mérete b, valamint a keresztmetszetre ható nyíróerő $\mathbf{V}$. Ekkor a másodrendű nyomaték a (78) alapján $I = ab^3/12$ és a húsvastagság $(2z) = a$. Ezek a mennyiségek a teljes keresztmetszetre állandóak.



54. ábra

Ami változik, az az elsőrendű nyomaték. A súlyponti tengelytől y távolságra levő réteg és a keresztmetszet szélső rétege közötti távolság $b/2 - y$, mivel a súlyponti tengely és a szélső szál távolsága $b/2$. A kérdéses réteg és a szélső réteg közötti síkidom súlypontja tehát ennek felénél helyezkedik el (mivel téglalapról van szó), és ehhez még hozzá kell adni y-t, hogy a teljes keresztmetszet súlypontjától való távolságot meghatározzuk:

(419) $$s_y(y) = y + \frac{\frac{b}{2} - y}{2} = \frac{y}{2} + \frac{b}{4}$$

Ebből az elsőrendű nyomaték:

(420) $$S_x(y) = \left(\frac{y}{2} + \frac{b}{4}\right) a \left(\frac{b}{2} - y\right) = -\frac{y^2}{2} + \frac{b^2}{8}$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve a (418)-ba egyből a teljes nyírófeszültséget kapjuk meg, hiszen a *b* oldal párhuzamos az *y* tengellyel, ezért $\tau_{yx} \equiv 0$:

(421) $$\tau_{xe}(y) = \tau_{xy}(y) \frac{V}{\frac{ab^3}{12}} \frac{-\frac{y^2}{2} + \frac{b^2}{8}}{a} = -\frac{6V}{ab^3} y^2 + \frac{3V}{2ab}$$

A nyírófeszültség tehát a keresztmetszet mentén másodfokú parabola szerint változik. Ha egy összetett keresztmetszet felbontható az *y* tengelyre szimmetrikus téglalapokra, a nyírófeszültség függvénye akkor is parabolaívekből fog állni, amelyeknek zérushelyei továbbra is a keresztmetszet szélső szálainál lesznek. Ahol a húsvastagság ugrásszerűen változik, ott a $\tau_{xe}(y)$ függvény két értékét kell kiszámítani: a $\tau_{xe}(y - 0)$ és a $\tau_{xe}(y + 0)$ értéket. Mivel az argumentumok különbsége infinitezimálisan kicsi (nulla), mindkét érték számolásánál ugyanazokat az értékeket kell a (418) kifejezésbe behelyettesíteni, a különbség mindössze a (2 *z*) húsvastagságban lesz, hiszen ez az egyetlen paraméter, ami megváltozik. Az *y* tengely mentén való elmozdulás infinitezimális volta miatt még az elsőrendű nyomaték értéke sem változik meg.

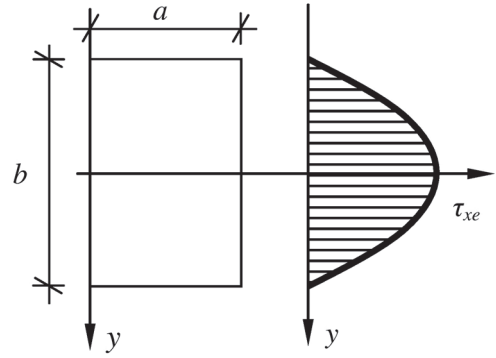
A (421) függvény első deriváltjának zérushelye megmutatja, hogy hol veszi fel a nyírófeszültség a maximumát:

(422) $$\tau'_{xe}(y) = -\frac{12V}{ab^3} y = 0$$

amelyet rendezve az $y = 0$ hely, a keresztmetszet súlypontja adódik maximumhelynek. Itt a nyírófeszültség értéke $3V/2ab$. Mivel az *ab* szorzat a keresztmetszet területét jelenti, ezért ezt *A*-val jelölve és így kifejezve a $\tau_{xe,\max}$ értékét:

(423) $$\tau_{xe,\max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$

A feszültségeloszlás kvalitatív grafikus ábrázolását az 55. ábrán láthatjuk.



55. ábra

Ez azonban csak olyan téglalap alakú keresztmetszetekre igaz, ahol $b >> a$. Mivel ez a legtöbb, valós életben előforduló esetben nem igaz, a (423) képlet helyett egy módosítottat kell használni, amely tartalmaz egy, az a/b aránytól függő β szorzótényezőt:

(424) $$\tau_{xe,\max} = \beta\frac{3}{2}\frac{V}{A}$$

A β paraméter értékét az alábbi táblázatban találjuk.

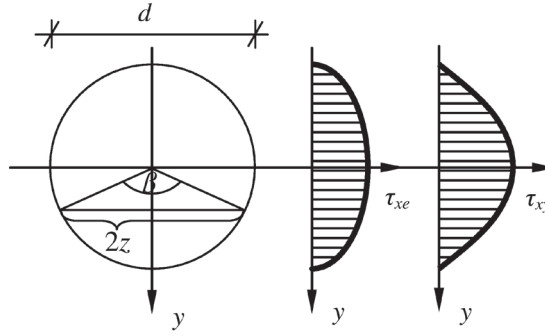
a/b	0,25	0,5	1	2	4	6	10	20	50
β	1,008	1,033	1,126	1,396	1,988	2,852	3,770	6,740	15,65

A táblázat egyes értékei legjobban a $\beta\ (a/b) = 0{,}296\ (a/b) + 0{,}84$ lineáris függvénnyel írhatóak le.

9.1.1.2. Feszültségeloszlás kör keresztmetszet mentén

Határozzuk meg egy, az 56. ábrán látható, r sugarú kör keresztmetszetű tartóra a felületének érintőjével párhuzamos irányokban fellépő csúsztatófeszültségek nagyságát leíró $\tau_{xe}(y)$ függvényt. Azokon a helyeken, ahol az érintő iránya már jelentősen eltér az y tengely irányától, a $\tau_{xe}(y)$ függvény

értéke is jelentősen eltér az adott pontbeli $\tau_{xy}(y)$ értéktől. A keresztmetszetre ható nyíróerőt jelöljük V-vel. Ekkor a másodrendű nyomaték a (87) alapján $I = d^4\,\pi / 64 = r^4\,\pi / 4$.



56. ábra

Az elsőrendű nyomaték és a húsvastagság y függvényében változik. Első lépésben határozzuk meg a $\tau_{xe}(\beta)$ függvényt, ahol β az adott ($2z$) húsvastagsághoz tartozó középponti szög. A koszinusztételt felhasználva a húsvastagságot megkapjuk a középponti szög és a sugár ismeretében:

(425) $$2z^2 = r^2 + r^2 - 2rr\cos(\beta) = 2r^2(1-\cos(\beta))$$

(426) $$(2z) = \sqrt{2r^2[1-\cos(\beta)]} = \sqrt{2r^2\left[2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]} = 2r\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

A körszelet súlypontjának távolsága a kör középpontjától:

(427) $$s_y = \frac{4r\sin^3\left(\frac{\beta}{2}\right)}{3(\beta-\sin(\beta))}$$

A körszelet területét a befoglaló körcikk területének és azon háromszög területének különbségeként kapjuk meg, amelynek két oldala a β középponti szöghöz tartozó két sugár, harmadik oldala a körszelet szelője, amelynek hossza éppen a húsvastagság:

(428) $$A = \frac{r^2}{2}\left(\beta - \sin(\beta)\right)$$

Ezeket az értékeket behelyettesítve a (418)-ba és a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve:

(429) $$\tau_{xy}(\beta) = \frac{V}{\frac{r^4\pi}{4}} \frac{\frac{4r\sin^3\left(\frac{\beta}{2}\right)}{3\left(\beta - \sin(\beta)\right)} \frac{r^2}{2}\left(\beta - \sin(\beta)\right)}{2r\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{4V\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{3r^2\pi}$$

Mivel a keresztmetszet érintője csak az $y = 0$, azaz a $\beta = \pi$ helyen párhuzamos az y tengellyel, más középponti szögekre a teljes nyírófeszültség még számítandó. A $\boldsymbol{\tau}_{xe}$ és a $\boldsymbol{\tau}_{xy}$ vektorok hajlásszöge elemi geometriával számolható: $\boldsymbol{\tau}_{xe} \measuredangle \boldsymbol{\tau}_{xy} = \pi/2 - \beta/2$, amelyből a teljes nyírófeszültség (a $\cos(\pi / 2 - \alpha) = \sin(\alpha)$ összefüggést felhasználva):

(430) $$\tau_{xe}(\beta) = \frac{\tau_{xy}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\tau_{xy}}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

(431) $$\tau_{xe}(\beta) = \frac{4V\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{3r^2\pi}$$

A $\tau_{xe}(\beta)$ függvény maximuma első deriváltja zérushelyének megkeresésével meghatározható:

(432) $$\tau'_{xe}(\beta) = \frac{2V\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{3r^2\pi} = 0$$

ahonnan $\cos(\beta/2) = 0$, amelynek legkisebb pozitív megoldása $\beta/2 = \pi/2$, azaz $\beta = \pi$. A többi megoldás az ennél 2π-vel nagyobb és kisebb szögek, amelyek azonban ugyanahhoz a húsvastagsághoz, a keresztmetszet súlypontján átmentő vízszintes tengelyhez tartoznak. Ez pedig éppen a keresztmetszet

semleges rétege. A nyírófeszültség értéke itt, a $\tau_{xe}(\beta = \pi)$ helyen maximális, értéke (felhasználva, hogy a tartó keresztmetszetének nagysága $A = r^2\pi$):

(433) $$\tau_{xe,\max} = \frac{4V}{3r^2\pi} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$$

Azt látjuk, hogy a $\tau_{xe,\max}$ értéke téglalap és kör keresztmetszetre is a V/A aránynak egy konstansszorosa, amely konstans téglalapra 3/2, körlapra pedig 4/3. Körgyűrű keresztmetszetre levezetve a képletet szintén egy V/A-val arányos kifejezést kapunk, csak ebben az esetben a konstans szorzó 2.

A körlapra érvényes $\tau_{xe}(\beta)$ függvényt át tudjuk számolni $\tau_{xe}(y)$ alakúra. Ehhez azonban ismernünk kell a $\beta(y)$ függvényt. Ennek meghatározásához először a húsvastagságot a Pitagorasz-tétel alapján a középponti szöggel kifejezve és ezt a (425) egyenlet jobb oldalával egyenlővé téve megkapjuk az adott y értékhez tartozó középponti szög nagyságát:

(434) $$\left(\frac{(2z)}{2}\right)^2 = r^2 - y^2$$

(435) $$(2z)^2 = 4r^2 - 4y^2$$

(436) $$4r^2 - 4y^2 = 2r^2(1 - \cos(\beta))$$

(437) $$\cos(\beta) = 1 - \frac{4r^2 - 4y^2}{2r^2} = 1 - 2 + \frac{2y^2}{r^2} = 2\frac{y^2}{r^2} - 1$$

A kétszeres szögekre vonatkozó $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$ trigonometrikus azonosság felhasználásával kifejezzük a (431) képletben szereplő $\sin(\beta/2)$ függvényt:

(438) $$1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2\frac{y^2}{r^2} - 1$$

(439) $$1 - 2\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = 2\frac{y^2}{r^2} - 1$$

majd ezt be is helyettesítjük a (431) egyenletbe, amivel kapjuk:

(440) $$\tau_{xe}(y) = \frac{4V\sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}}{3r^2\pi} = \frac{4V}{3A}\sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}$$

Ez az egyenlet matematikailag egy ellipszist ír le. Hasonlóan számolható a $\tau_{xy}(y)$ függvény is, amelyre a (438) kifejezés behelyettesítése után kapjuk:

$$\tau_{xy}(y) = \frac{4V\left(\sqrt{1-\frac{y^2}{r^2}}\right)^2}{3r^2\pi} = \frac{4V}{3A}\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right) \tag{441}$$

Ez az egyenlet matematikailag egy parabolát ír le. A $\tau_{xe}(y)$ és a $\tau_{xy}(y)$ függvényeket lásd az 56. ábrán.

9.1.2. Egyenszilárdságú tartó

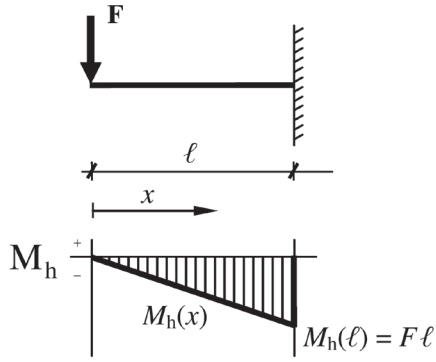
Mivel a gyakorlatban a tartókra ható hajlítónyomaték általában változik a tartó tengelye mentén, a jobb anyagkihasználás érdekében olyan, változó keresztmetszetű tartókat alkalmazunk, amelyek szélső szálára a maximális feszültség végig σ_{meg}-gel egyenlő. Ezek az úgynevezett egyenszilárdságú tartók, amelyek minden keresztmetszete egyenértékű veszélyesség szempontjából.

Változó keresztmetszetű tartó esetében a hajlítónyomaték tehát nem állandó, hanem egy $M_h(x)$ függvény szerint változik a tartó tengelye mentén. Mivel

$$\sigma_{max} = \frac{M_h}{K} \overset{!}{=} \sigma_{meg} \tag{442}$$

minden keresztmetszetre, σ_{meg} viszont végig konstans (mivel feltesszük, hogy a tartó homogén, és az anyaga is mindenhol azonos), ezért az M_h-hoz hasonlóan K sem egy konstans, hanem szintén egy függvény, $K(x)$ szerint változik a tartó tengelye mentén. Ha a változás folytonos és nem túl jelentős, a Navier-képlet ebben az esetben is jó értéket ad.

Tekintsünk egy ℓ hosszúságú, egyik végén befogott, téglalap keresztmetszetű rudat, amelyre a szabad végén egy **F** nagyságú erő hat (57. ábra)! Milyen alakúra tervezzük a rudat, ha azt szeretnénk, hogy a benne ébredő feszültség nagysága mindenhol σ_{meg} legyen?



57. ábra

Ha a tartó szélességét z-vel, magasságát y-nal, pontosabban $z(x)$-szel és $y(x)$-szel jelöljük, a másodrendű nyomaték a tengely mentén

(443) $$I(x) = \frac{z(x)y^3(x)}{12}$$

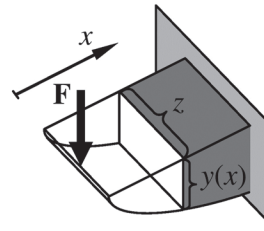
mivel a hajlítás tengelye a z tengellyel párhuzamos, azaz a semleges réteg az xz sík. A szélső szál távolsága $e(x) = y(x)/2$, a hajlítónyomaték pedig $M_h(x) = F\,x$ alakban írható, így a Navier-képlet a következő alakot veszi fel:

(444) $$\sigma_{meg} = \frac{M_h(x)}{I(x)}e(x) = \frac{12F\,x}{z(x)y^3(x)}\frac{y(x)}{2} = \frac{6F\,x}{z(x)y^2(x)}$$

Ha a tartó szélességéről követeljük meg, hogy konstans legyen, azaz $z(x) = z$ állandónak vesszük, kifejezhetjük a tartó y magasságát x függvényében:

(445) $$y(x) = \sqrt{\frac{6F\,x}{\sigma_{meg}\,z}} = \text{konst} \cdot \sqrt{x}$$

azaz azt kapjuk, hogy a tartó vastagságának egy négyzetgyökfüggvénnyel arányosan kell változnia az x koordináta növekedésével (58. ábra).

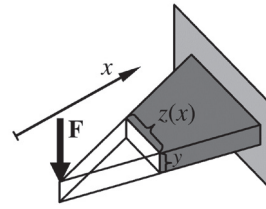


58. ábra

Ha a tartó vastagságáról követeljük meg, hogy konstans legyen, azaz $y(x) = y$ állandónak vesszük, kifejezhetjük a tartó z szélességét x függvényében:

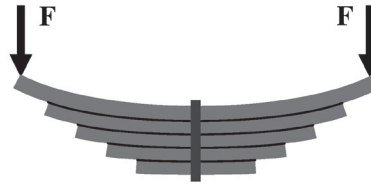
(446) $$z(x) = \frac{6\,F\,x}{\sigma_{\text{meg}}\,y^2} = \text{konst} \cdot x$$

ami egy nulla tengelymetszetű, $6\,F/y^2\sigma_{\text{meg}}$ meredekségű egyenes egyenlete, a meredekségben szereplő szorzótényezők azonban a tartó tengelye mentén végig állandók, így szorzatuk is konstans. Azaz a tartó szélessége lineárisan kell hogy változzon az x függvényében, hogy a rajta fellépő maximális hajlítónyomaték σ_{meg} legyen (59. ábra).



59. ábra

Ezen az elven készülnek például bizonyos járművek futóművének a laprugói is (60. ábra). Itt az egyenszilárdságú(hoz közeli) alakot nem folytonos kialakítással érik el, hanem több, egymásra helyezett lappal, amelyek egy vagy több ponton vannak egymáshoz rögzítve. A konstrukció egyszerűen eleget tesz az egyenszilárdság követelményének, és megfelelő kialakítás esetében egy lap sérülése ellenére a jármű még nem „ül le”, de lengésdinamikai hátrányai (konstans, Coulomb-súrlódásból adódó belső csillapítása, illetve lineáris karakterisztikája) miatt csak különböző módosításokkal szokás alkalmazni.



60. ábra

9.1.3. Méretezés hajlításra és nyírásra

A hajlításra és nyírásra való méretezés során általában elegendő hajlításra méretezni és nyírásra ellenőrizni. Azaz először méretezzük a tartót a (174) alapján tiszta hajlításra, majd a kapott keresztmetszeti jellemzők alapján megvizsgáljuk, hogy az azokból a (418) alapján számított maximális nyírófeszültségre igaz-e, hogy $\tau_{max} \leq \tau_{meg}$. Ha nem, a méretezést meg kell ismételni.

Ez a legtöbb esetben azért elégséges, mivel a hajlítófeszültség maximuma a szélső szálakban lép föl, ahol a nyírófeszültség nulla; míg a nyírófeszültség maximuma épp a semleges rétegnél található, ahol viszont a hajlítófeszültség nulla.

Abban az esetben viszont, amikor a húsvastagság hirtelen változik, mint például az I-szelvényű tartók esetében, előfordulhat, hogy a két feszültség úgy adódik össze, hogy az anyagra érvényes megengedett feszültséget már túllépi. Ezért az ilyen keresztmetszetekre ki kell számolni a hajlító- és a nyírófeszültség alapján az úgynevezett redukált feszültséget (σ_{red}), és erre is ellenőrizni kell, hogy $\sigma_{red} \leq \sigma_{meg}$ legyen.

9.2. A redukált feszültség

A többirányú összetett igénybevételeknek kitett tartók ellenőrzéséhez szükséges a fellépő $\boldsymbol{\sigma}$ és $\boldsymbol{\tau}$ feszültségek együttes hatásának vizsgálata. Ehhez a $\boldsymbol{\sigma}$ és $\boldsymbol{\tau}$ feszültségvektorokból egy feszültségelmélet alapján egy úgynevezett redukáltfeszültség-értéket (σ_{red}) állítunk elő, és nemcsak a $\sigma_{max} \leq \sigma_{meg}$ és a $\tau_{max} \leq \tau_{meg}$ összehasonlítást végezzük el, hanem a $\sigma_{red} \leq \sigma_{meg}$ ellenőrzését is.

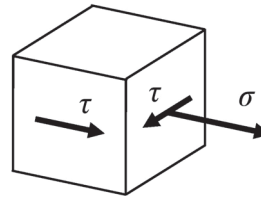
9.2.1. A Mohr-elmélet

A Christian Otto Mohr (1915–1918) német mérnök által 1882-ben kidolgozott elmélet alapján a redukált feszültség a 6.3. alfejezetben bemutatott főfeszültségek segítségével az alábbi módon számolható:

(447) $$\sigma_{\text{red,Mohr}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Olyan feszültségállapotban, amikor csak a 61. ábrán látható kiskockán bemutatott irányú feszültségek lépnek fel, a (447) az alábbi alakot veszi fel:

(448) $$\sigma_{\text{red,Mohr}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$



61. ábra

9.2.2. A Huber–Mises–Hencky-elmélet

1903-ban Tytus Maksymilian Huber (1952–1950) lengyel gépészmérnök, a Lwówi Műszaki Egyetem (ma Lvivi Nemzeti Műszaki Egyetem) professzora közölte először az általa kidolgozott feszültségelméletet és az az alapján számolt redukáltfeszültség-értéket. Mivel azonban cikke lengyelül jelent meg, nem került be a nemzetközi tudományos köztudatba. Emiatt 1913-ban az ukrajnai zsidó születésű, később az USA-ba kivándorolt és ott a Harvard Alkalmazott Matematikai Tanszékének professzoraként dolgozó Richard Edler von Mises (1963–1953) Hubertől függetlenül levezette az elméletet és abból az összefüggést. Mindkettőjüktől függetlenül 1924-ben Heinrich Hencky (1965–1951) német mérnök a Delfti Műszaki Egyetemen dolgozva is felírta azokat, amelyekre manapság így Huber–Mises–Hencky-elméletként és Huber–Mises–Hencky-féle (röviden HMH) redukált feszültségként hivatkozunk:

(449) $$\sigma_{\text{red,HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}$$

A 61. ábrán bemutatott feszültségállapotban a (449) a következő alakot veszi fel:

(450) $$\sigma_{\text{red,HMH}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

9.3. Húzás vagy nyomás és csavarás

Míg a hajlítás és a nyírás viszonylag jól kezelhetők külön-külön, mivel általában ahol a **σ** feszültség jelentős, ott a **τ** elhanyagolható, és fordítva, csak jelentős húsvastagság-változásoknál kell a redukált feszültséggel ellenőrizni a méretezést, addig az egyidejű húzás (vagy nyomás) és csavarás esetében ez nem áll fenn. A csavarófeszültség ugyanis a keresztmetszet szélső szálában maximális, a húzó(nyomó)feszültség pedig a teljes keresztmetszeten konstans.

A húzás vagy nyomás hatására ébredő normális feszültség és a csavarás által keltett csúsztatófeszültség ugyanakkor a 61. ábrának megfelelően ábrázolható, azaz a redukált feszültség meghatározására használható mind a (448), mind a (450) képlet. A behelyettesítendő σ és τ feszültségértékek a (22) alapján számolható maximális húzó- vagy nyomófeszültség és a (247) alapján számolható maximális csavarófeszültség.

9.4. Hajlítás és csavarás

A húzás (nyomás) és hajlítás esetéhez hasonlóan a hajlítás és csavarás esetében is mindig szükséges valamilyen feszültségelméletet felhasználni a számolásainkhoz. A csavarófeszültség ugyanis a keresztmetszet szélső szálában maximális, ugyanott, ahol a hajlítófeszültségnek is maximuma van.

Mivel azonban a feszültségek ebben az esetben is a 61. ábrának megfelelően hatnak, a redukált feszültség meghatározására használhatók a (448) és a (450) összefüggések. A behelyettesítendő σ és τ feszültségek a (60) alapján számolható maximális hajlítófeszültség és a (247) alapján számolható maximális csavarófeszültség.

Mivel kör keresztmetszetű tartók esetében a hajlítónyomaték ($\mathbf{M}_h$) és a csavarónyomaték ($\mathbf{T}$) egymásra merőleges vektorok, eredőjük, az úgynevezett redukált nyomaték ($\mathbf{M}_{red}$) vagy ideális nyomaték ($\mathbf{M}_{id}$) egyszerűen számolható:

(451) $$M_{red} = \sqrt{M_h^2 + T^2}$$

és ezzel a redukált feszültség:

(452) $$\sigma_{red} = \frac{M_{red}}{K}$$

Vákát oldal

10. Alakváltoztató munka

Hasson egy rugalmas testre egy tetszőleges, i darab erőből ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,…, $\mathbf{F}_i$) és j darab erőpárból (amelyek által kifejtett forgatónyomatékok $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$,…, $\mathbf{M}_j$) álló egyensúlyi erőrendszer. Azonban terheljük ezeket úgy a testre, hogy kezdetben $\mathbf{F}_k = 0$, $1 \le k \le i$ és $\mathbf{M}_\ell = 0$, $1 \le \ell \le j$, majd fokozatosan növeljük nagyságukat végső értékükre úgy, hogy az erőrendszer közben végig egyensúlyi legyen.

Az így a testre terhelt egyensúlyi erőrendszer a test mozgásállapotát nem, csak alakját változtatja meg. Jelöljük f_k-val azt a távolságot, mellyel az $\mathbf{F}_k$ erő a támadáspontját önmagával párhuzamosan elmozdítja, és φ_ℓ-lel azt a szöget, amellyel az $\mathbf{M}_\ell$ forgatónyomaték síkja a forgatónyomaték-vektor tengelye körül elfordul.

Mivel a terhelés megszűnése után a test visszanyeri eredeti alakját, azaz tökéletesen rugalmas, ezért tekinthetünk rá úgy, mintha a támadáspontokban egy D rugóállandójú rugó tárolná a külső erők munkáját. A munka definíciója szerint a tárolt munka nagyságát úgy számíthatjuk ki, hogy az $\mathbf{F}$ erő és az általa okozott $\Delta\mathbf{x}$ elmozdulás vektorát skalárisan összeszorozzuk:

(453) $$W = \mathbf{F}\,\Delta\mathbf{x}$$

Egy tökéletesen rugalmas rugóra ható erő ($\mathbf{F}_k$) és annak megnyúlása ($\Delta x_k = \ell_1 - \ell_0$) között fennáll az

(454) $$F_k = D\,\Delta x_k$$

összefüggés. Ez a Hooke-törvénnyel ekvivalens egyenlet, hiszen a (30)-ban például húzás vagy nyomás esetén $\sigma = F/A$ és $\varepsilon = \Delta x/x$, azaz a (30) úgy is írható lenne a konstansok átrendezése után, hogy

(455) $$F_k = \frac{EA}{x_0}\,\Delta x_k$$

ahol a $D = EA/x_0$ jelölést vezettük be, amelyben mind E, mind A, mind x_0 végig állandó. Vagyis rugalmas testet feltételezve valójában a Hooke-törvény

érvényességét (és így a rugó képének helyességét) kihasználva írjuk le a deformációt.

A (454) egyenletet infinitezimálisan kis $\mathrm{d}x_k$ megnyúlásra felírva

$$\mathrm{d}F_k = D\mathrm{d}x_k \tag{456}$$

majd mindkét oldalt x_k-val szorozva (453) alapján, hogy munkát kapjunk:

$$\mathrm{d}W_k = \mathrm{d}F_k x_k = D\, x_k \mathrm{d}x_k \tag{457}$$

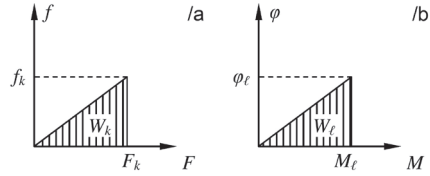
végül mindkét oldalt kiintegrálva 0-tól f_k-ig, megkapjuk a munka nagyságát:

$$W_k = \int \mathrm{d}W_k = \int_0^{f_k} D\, x_k\, \mathrm{d}x_k = D \int_0^{f_k} x_k\, \mathrm{d}x_k = D\frac{f_k^2}{2} \tag{458}$$

Itt azonban $D f_k = F_k$, így az f_k elmozdulást okozó $\mathbf{F}_k$ erő munkája

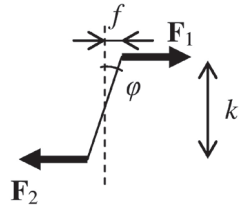
$$W_k = \frac{F_k f_k}{2} \tag{459}$$

Ez megfelel annak, mintha az erőt és az általa okozott elmozdulást, amely az erő lineáris függvénye a Hooke-törvény érvényessége miatt (ahol az egyenes meredeksége $1/D = x_0/EA$), egy grafikonon ábrázolnánk, és a munkát a görbe alatti területként határoznánk meg (62. ábra).



62. ábra

Hasonlóan meghatározható egy adott pontban ható, φ szögelfordulást okozó **M** forgatónyomaték munkája (63. ábra).



63. ábra

Egy **M** forgatónyomaték ugyanis kifejezhető egy *k* karú, **F** alapú erőpárként is, ahol

(460) $$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \frac{\mathbf{M}}{k}$$

A forgatónyomaték hatására az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erők támadáspontjai azonos nagyságú, de ellentétes irányú *f* távolságot mozdulnak el, amelyből a (459) és (460) egyenletek alapján a végzett munka

(461) $$W = \frac{F_1 f}{2} + \frac{(-F_2)(-f)}{2} = \frac{M f}{2k} + \frac{M f}{2k} = \frac{2 M f}{2k}$$

Mivel $f << 1$, ezért

(462) $$\frac{2f}{k} = \frac{f}{k/2} = \mathrm{tg}\varphi$$

és mivel $\varphi << 1$, ezért $\mathrm{tg}\,\varphi \approx \varphi$, és ezzel a (461) a következő alakra egyszerűsödik:

(463) $$W = \frac{M\varphi}{2}$$

amely az összes *j* darab, az eredeti problémában feltételezett $\mathbf{M}_\ell$, $1 \le \ell \le j$ forgatónyomatékot kifejtő erőpárra igaz:

(464) $$W_\ell = \frac{M_\ell \varphi_\ell}{2}$$

Ennek grafikus megjelenítését láthatjuk a 62/b ábrán.

Képezve a

(465) $$W = \sum_{k=1}^{i} W_k + \sum_{\ell=1}^{j} W_\ell = \sum_{k=1}^{i} \frac{F_k f_k}{2} + \sum_{\ell=1}^{j} \frac{M_\ell \varphi_\ell}{2}$$

összeget, megkapjuk a rugalmas testre terhelt egyensúlyi erőrendszer által a testen végzett munkát. Mivel azonban a test rugalmas, a terhelés megszűnésével visszanyeri eredeti alakját. Ez a terhelés megszűnése utáni alakváltozás felhasználható egy *U* munkavégzésre, azaz a rugalmas test munkát képes tárolni. Ezen munka nagysága azonos, de előjele ellentétes a terhelő egyensúlyi erőrendszer által végzettével:

(466) $$U = -W$$

amely igaz külön-külön a normális és a csúsztatófeszültségekre is:

$$U = U_\sigma + U_\tau = -\left(W_\sigma + W_\tau\right) \tag{467}$$

Ezt a munkát a rugalmas test a benne a terhelés hatására felhalmozódott feszültségek relaxációja által végzi. Válasszunk ki tehát a testből egy infinitezimális térfogatelemet! Az erre a $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ nagyságú térfogatelemre ható feszültségeket jelöljük az *xyz* jobbsodrású koordináta-rendszerben σ_x, σ_y és σ_z, valamint τ_{xy}, τ_{xz},és τ_{zy}-nal.

A σ_x feszültség az *x* tengely irányában egy

$$\mathrm{d}F = \sigma_x \mathrm{d}A = \sigma_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{468}$$

nagyságú húzóerőnek felel meg, amely hatására az elmozdulás a fajlagos nyúlás (18)-beli definíciója alapján $\varepsilon_x\,\mathrm{d}x$. Azonban mind az erő, mind az elmozdulás folyamatosan változik, a munkavégzés alatt egyik sem állandó, ezért a munka nem számolható közvetlenül ezek szorzataként. Egy ilyen közbenső állapotra, amikor $0 \le \sigma_x \le \sigma_{x,\max}$, az elmozdulás értéke $\mathrm{d}\varepsilon_x\,\mathrm{d}x$. Ezek szorzataként már felírható egy $\mathrm{d}U_{\sigma x}$ elemi munka nagysága, amelyre

$$\mathrm{d}U_{\sigma x} = \sigma_x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varepsilon_x \mathrm{d}x = \sigma_x \mathrm{d}\varepsilon_x \mathrm{d}V \tag{469}$$

adódik. Mindkét oldalt kiintegrálva megkapjuk a belső erők munkáját:

$$U_{\sigma x} = \int \mathrm{d}U_{\sigma x} = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \mathrm{d}V\,\mathrm{d}\varepsilon_x \tag{470}$$

Mindkét oldalt leosztva az elemi térfogattal bevezethetjük a fajlagos rugalmas alakváltozási energia, vagy más néven energiasűrűség fogalmát:

$$u_{\sigma x} = \frac{U_{\sigma x}}{\mathrm{d}V} = \int \frac{\mathrm{d}U_{\sigma x}}{\mathrm{d}V} = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \mathrm{d}\varepsilon_x = E\int_0^{\varepsilon_x} \varepsilon_x \mathrm{d}\varepsilon_x \tag{471}$$

ahol felhasználtuk a Hooke-törvényt is, és hogy a Young-modulusz állandó az egész testre. Az integrált elvégezve kapjuk:

$$u_{\sigma x} = \frac{E\varepsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \tag{472}$$

Hasonlóan felírható a nyírófeszültségek hatására keletkező fajlagos rugalmas alakváltozási energia:

$$u_{\tau,xy} = \frac{U_{\tau,xy}}{\mathrm{d}V} = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} \mathrm{d}\gamma_{xy} = G\int_0^{\gamma_{xy}} \gamma_{xy} \mathrm{d}\gamma_{xy} = \frac{G\gamma_{xy}^2}{2} = \frac{\tau_{xy}\gamma_{xy}}{2} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{473}$$

Mivel a munka additív mennyiség, felírhatjuk a térfogatelem teljes energiasűrűségét:

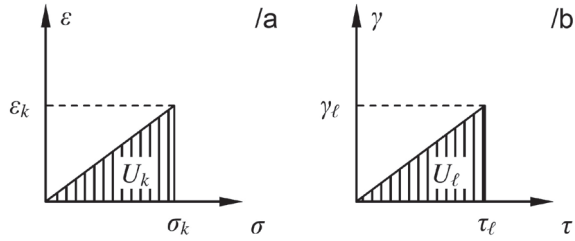
(474) $$u = u_\sigma + u_\tau = u_{\sigma x} + u_{\sigma y} + u_{\sigma z} + u_{\tau x} + u_{\tau y} + u_{\tau z} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{yz}\tau_{yz}\right)$$

amelyben a normális feszültségekkel arányos tagokat u_σ-val, a csúsztatófeszültségekkel arányos tagokat u_τ-val jelölve és mindkét oldalt kiintegrálva a (471) egyenlet egy másik alakját kapjuk:

(475) $$U = U_\sigma + U_\tau = \int u\,\mathrm{d}V = \int \left(u_\sigma + u_\tau\right)\mathrm{d}V$$

amely jelentésében megegyezik a (465) egyenlettel, csak ott az erők, elmozdulások, forgatónyomatékok és szögelfordulások diszkrét volta miatt szummázás, míg itt a feszültségek folytonos jellege miatt integrálás szerepel.

Ezzel gyakorlatilag átskáláztuk a 62. ábrát, amely az új változókban a 64. ábra szerint néz ki.



64. ábra

Válasszunk ki egy konkrét erőt és egy konkrét forgatónyomatékot, jelöljük őket **F**-fel és **M**-mel, az általuk okozott elmozdulást és elfordulást *f*-fel és φ-vel, és foglalkozzunk most csak ezek hatásával. A (472)-ben és (473)-ban kapott eredményeinket felhasználva:

(476) $$u = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}$$

A (476) egyenletet kiintegrálva a tartó teljes keresztmetszetére megkapjuk a tartóban tárolt teljes belső munkát:

(477) $$U = \int u \,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\sigma^2(x)}{2E}\,\mathrm{d}V + \int_V \frac{\tau^2(x)}{2G}\,\mathrm{d}V$$

Az első tag a normális irányú erők munkáját, azaz a húzás (nyomás) vagy hajlítás hatására felhalmozott munkát jelenti, a második tag pedig a csúsztatófeszültségek, azaz a nyírás és a csavarás hatására felhalmozottat. Mivel húzás vagy nyomás esetében $\sigma = F/A$, hajlítás esetében pedig $\sigma = My/I$, míg nyírásra $\tau = V(x)\, S(y) / I\, 2\, z(y)$, csavarásra pedig $\tau = Tr/I_p$, a (477) a következőképpen fejthető ki (állandó keresztmetszetet feltételezve és a $\mathrm{d}V = A\ \mathrm{d}x$ helyettesítést elvégezve):

(478) $$U = \int_0^\ell \frac{F^2(x)}{2EA}\,\mathrm{d}x + \int_0^\ell \frac{M^2(x)A}{2EI^2}\,y^2\,\mathrm{d}x + \int_0^\ell \frac{V^2(x)S^2(y)}{2GI^2\,4z^2(y)}\,A\mathrm{d}x + \int_0^\ell \frac{T^2(x)A}{2GI_\mathrm{p}^2}\,r^2\,\mathrm{d}x$$

Ha a rugalmas moduluszokat az egyes tartókra állandónak tekintjük (vagyis anyagukat homogénnek feltételezzük), és mivel a keresztmetszetet állandónak vettük, ezek kiemelhetők az integrál elé. A harmadik integrálban bővítünk A-val, hogy később a többi taghoz hasonló alakú kifejezést kapjunk. Továbbá, húzás (nyomás) esetében a 2. fejezetben láttuk, hogy a tartó egyes $\mathrm{d}x$ hosszúságú elemeire ható nyomó- vagy húzóerő állandó, hasonlóan csavarás esetében a csavarónyomatékhoz, ezért az első és a negyedik integrál esetében az erő és a csavarónyomaték is kivihető az integrál elé, amivel a (478) egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

(479) $$U = \frac{F^2}{2EA}\int_0^\ell \mathrm{d}x + \frac{1}{2EI^2}\int_0^\ell M^2(x)A\,y^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2GA}\int_0^\ell \frac{V^2(x)S^2(y)}{I^2\,4z^2(y)}\,A^2\,\mathrm{d}x + \frac{T^2}{2GI_\mathrm{p}^2}\int_0^\ell A\,r^2\mathrm{d}x$$

A második integrálban azonban az $A\,y^2$ kifejezés éppen a másodrendű nyomaték, a negyedik integrálban pedig az $A\,r^2$ a poláris másodrendű nyomaték, amelyek szintén kivihetőek az integrálás elé, és az integrál előtti konstans nevezőjében az $I\,E$ hajlítómerevség jelenik meg:

(480) $$U = \frac{F^2}{2EA}\int_0^\ell \mathrm{d}x + \frac{1}{2EI}\int_0^\ell M^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2GA}\int_0^\ell V^2(x)\frac{S^2(y)A^2}{I^2\,4z^2(y)}\,\mathrm{d}x + \frac{T^2}{2GI_\mathrm{p}}\int_0^\ell \mathrm{d}x$$

Az első és a negyedik integrált elvégezve megkapjuk az F erővel húzott (nyomott), illetve a T nagyságú csavarónyomatékkal csavart tartóban felhalmozott munkát:

(481) $$U_{\text{húzás(nyomás)}} = \frac{F^2\,\ell}{2EA}$$

(482) $$U_{\text{csavarás}} = \frac{T^2\,\ell}{2\,G\,I_{\text{p}}}$$

Mivel hajlítás esetében a hajlítónyomaték a tartó tengelye mentén általában változik, ezért a második integrál elvégzéséhez az esetek túlnyomó többségében szükséges az $M(x)$ függvény meghatározása.

A harmadik integrálban szereplő $S^2(y)\,A^2 / I^2\,4\,z^2(y)$ tört csak a keresztmetszet alakjától, illetve a nyíróerők irányától függő dimenziómentes szám, amely ezért kihozható az integrálás elé. Jelöljük ezt a tényezőt β-val. A nyíróerő hatására felhalmozott munka meghatározásához azonban továbbra is szükséges a $V(x)$ függvény konkrét alakjának ismerete:

(483) $$U_{\text{nyírás}} = \frac{\beta}{2\,G\,A}\int_0^{\ell} V^2(x)\,\mathrm{d}x$$

A β tényező értéke négyzetre 6/5, körre 32/27, I-szelvényre 21/10.

10.1. Betti-tétel

Adott egy rugalmas test. Terheljünk rá két egyensúlyi erőrendszert, jelöljük ezeket $\mathfrak{F}_1$-gyel és $\mathfrak{F}_2$-vel. Ha először az $\mathfrak{F}_1$ erőrendszert terheljük rá, ez valamilyen módon deformálja azt, W_1 nagyságú munkát végezve rajta. Ha ezután ráterheljük az $\mathfrak{F}_2$ erőrendszert, az is végez a testen egy W_2 nagyságú munkát. Azonban ekkor az $\mathfrak{F}_1$ erőrendszer is végez még munkát, jelöljük ezt W_{12}-vel.

Ha a testre fordított sorrendben terheljük rá a két erőrendszert, akkor először az $\mathfrak{F}_2$ erőrendszer végez egy W_2 nagyságú munkát, majd az $\mathfrak{F}_1$ erőrendszer egy W_1 nagyságú munkát és az $\mathfrak{F}_2$ erőrendszer egy W_{21} nagyságú munkát.

A Betti-tétel[6] értelmében az összes végzett munka független attól, hogy az erőrendszereket milyen sorrendben terheljük a testre, azaz

(484) $$W_1 + W_2 + W_{12} = W_1 + W_2 + W_{21}$$

és így

(485) $$W_{12} = W_{21}$$

[6] Enrico Betti (1823–1892), olasz matematikus.

azaz két erőrendszernek egymás hatására végzett, úgynevezett idegen munkája egyenlő. Az energiamegmaradás miatt ez érvényes a belső erők munkáira is:

(486) $$U_{12} = U_{21}$$

Térjünk vissza a (480) egyenlethez, és írjuk azt fel az $\mathfrak{F}_1$ és az $\mathfrak{F}_2$ erőrendszerekre is:

(487) $$-W = U = \frac{F_1^2}{2EA}\int_0^\ell \mathrm{d}x + \frac{1}{2EI}\int_0^\ell M_1^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2GA}\int_0^\ell V_1^2(x)\mathrm{d}x + \frac{T_1^2}{2GI_\mathrm{p}}\int_0^\ell \mathrm{d}x$$

(488) $$-W = U = \frac{F_2^2}{2EA}\int_0^\ell \mathrm{d}x + \frac{1}{2EI}\int_0^\ell M_2^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2GA}\int_0^\ell V_2^2(x)\mathrm{d}x + \frac{T_2^2}{2GI_\mathrm{p}}\int_0^\ell \mathrm{d}x$$

míg az idegen munkákat a

(489) $$-W_{12} = -W_{21} = U_{12} = U_{21} =$$
$$= \frac{F_1 F_2}{2EA}\int_0^\ell \mathrm{d}x + \frac{1}{2EI}\int_0^\ell M_1(x)M_2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2GA}\int_0^\ell V_1(x)V_2(x)\mathrm{d}x + \frac{T_1 T_2}{2GI_\mathrm{p}}\int_0^\ell \mathrm{d}x$$

egyenlet írja le.

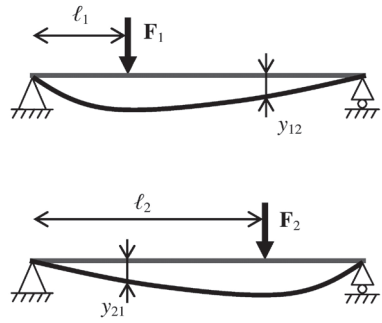
10.2. Maxwell-tétel

A Maxwell-tétel[7] valójában a Betti-tétel speciális esete. Azt mondja ki, hogy az erőhatás helye és az alakváltozás helye felcserélhető.

Terheljünk meg egy kéttámaszú tartót egy $\mathbf{F}_1$ erővel. Ennek hatására a tartó az $\mathbf{F}_1$ erő támadáspontjában lehajlik. Ezután terheljük meg a tartót egy $\mathbf{F}_2$ erővel, aminek hatására a tartó az $\mathbf{F}_1$ erő támadáspontjában tovább hajlik, a plusz lehajlás értékét jelöljük y_{12}-vel. Ekkor a W_{12} idegen munka nagysága $F_1 y_{12}$ lesz.

Ha az erőket azonos támadáspontokban, de fordított sorrendben terheljük, az $\mathbf{F}_2$ erő hatására az $\mathbf{F}_1$ erő támadáspontja lehajlik. Az $\mathbf{F}_1$ erő ráterhelése után annak támadáspontja tovább hajlik, jelöljük ezt y_{21}-gyel. A W_{21} idegen munka nagysága tehát $F_2 y_{21}$. A két ráterhelési sorrendet szemlélteti a 65. ábra.

[7] James Clerk Maxwell (1831–1879), skót matematikus, fizikus.



65. ábra

A Betti-tétel értelmében a két idegen munka megegyezik, azaz:

(490) $$W_{12} = F_1 y_{12} = F_2 y_{21} = W_{21}$$

Ha $F_1 = F_2$, akkor $y_{12} = y_{21}$.

10.3. Castigliano-tételek

Hasson egy rugalmas testre egy tetszőleges, i darab erőből ($\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_i$) és j darab erőpárból (amelyek által kifejtett forgatónyomatékok $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_j$) álló egyensúlyi erőrendszer, amelyet jelöljünk $\mathfrak{F}$-fel. A külső erők munkája ezek függvénye: $W = W(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_i, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_j)$.

Változtassuk meg az i-edik erő nagyságát egy infinitezimális nagyságú $\mathrm{d}F_i$-vel. Ekkor a külső erők munkájának megváltozása

(491) $$\mathrm{d}W = \frac{\partial W}{\partial F_i}\mathrm{d}F_i$$

lesz. Ha az erőket és forgatónyomatékokat fordítva terheljük rá a testre, azaz először $\mathrm{d}F_i$-t, majd $\mathfrak{F}$-et, a $\mathrm{d}F_i$ erő teljes munkája a saját és az $\mathfrak{F}$ erőrendszer idegen munkájából adódik össze:

(492) $$\mathrm{d}W = \frac{1}{2}\mathrm{d}f_i \mathrm{d}F_i + f_i \mathrm{d}F_i$$

A másodrendűen kicsiny tagot elhanyagolva:

(493) $$\mathrm{d}W = f_i \mathrm{d}F_i$$

amely egyenletnek a bal oldalába a (491) egyenletet behelyettesítve és dF_i-vel egyszerűsítve kapjuk:

$$\frac{\partial W}{\partial F_i}\mathrm{d}F_i = f_i \mathrm{d}F_i \tag{494}$$

$$f_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \tag{495}$$

A (495) egyenlet az első Castigliano-tétel,[8] amely azt mondja ki, hogy a külső erőrendszer munkájának F_i erő szerinti parciális deriváltja megadja az F_i erő támadáspontjának erő irányú elmozdulását.

A második Castigliano-tétel levezetéséhez változtassuk meg a *j*-edik forgatónyomaték nagyságát egy infinitezimális nagyságú dM_j-vel. Ekkor a külső erők munkájának megváltozása

$$\mathrm{d}W = \frac{\partial W}{\partial M_j}\mathrm{d}M_j \tag{496}$$

lesz. Ha az erőket és forgatónyomatékokat fordítva terheljük rá a testre, azaz először dM_j-t, majd F-et, a dM_j forgatónyomaték teljes munkája a saját és az $\mathfrak{F}$ erőrendszer idegen munkájából adódik össze:

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{2}\mathrm{d}\varphi_j \mathrm{d}M_j + \varphi_j \mathrm{d}M_j \tag{497}$$

A másodrendűen kicsiny tagot elhanyagolva:

$$\mathrm{d}W = \varphi_j \mathrm{d}M_j \tag{498}$$

amely egyenletnek a bal oldalába a (496) egyenletet behelyettesítve és dM_j-vel egyszerűsítve kapjuk:

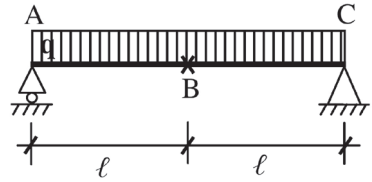
$$\frac{\partial W}{\partial M_j}\mathrm{d}M_j = \varphi_j \mathrm{d}M_j \tag{499}$$

$$\varphi_j = \frac{\partial W}{\partial M_j} \tag{500}$$

[8] Carlo Alberto Castigliano (1847–1884) olasz matematikus, fizikus.

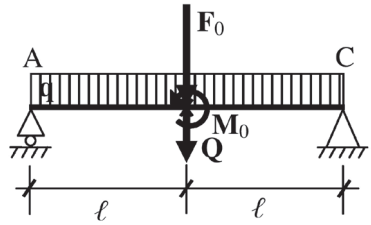
amely a második Castigliano-tétel. Ez azt mondja ki, hogy a külső erőrendszer munkájának M_j forgatónyomaték szerinti parciális deriváltja megadja az M_j forgatónyomaték támadáspontjának szögelfordulását.

Lássunk egy konkrét példát a Castigliano-tételek használatára. Határozzuk meg a 66. ábrán látható kéttámaszú tartó B keresztmetszetének lehajlását és szögelfordulását!



66. ábra

A Castigliano-tételek alkalmazásához azonban egy, a B keresztmetszetben ható koncentrált erő, illetve koncentrált forgatónyomaték szerint kellene parciálisan deriválnunk. Mivel ott ilyenek nincsenek, ezért hozzáadunk a B keresztmetszetben a rendszerhez egy $\mathbf{F}_0$, úgynevezett segéderőt és egy $\mathbf{M}_0$, úgynevezett segédnyomatékot, amelyeket az utolsó lépésben nullává fogunk tenni (67. ábra).



67. ábra

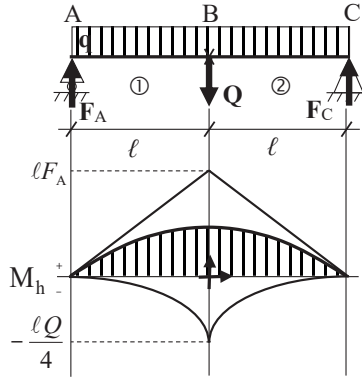
Vegyük fel a koordináta-rendszerünk origóját a B keresztmetszetben úgy, hogy az x tengely a tartó tengelye legyen. Mivel a hajlítónyomaték additív mennyiség, ezért külön-külön meghatározva a **q** megoszló erőrendszer, az $\mathbf{F}_0$ koncentrált erő és az $\mathbf{M}_0$ koncentrált forgatónyomaték hajlítónyomatéki függvényét, ezek összege fogja adni a teljes szerkezet $M(x)$ függvényét.

Először határozzuk meg az A és a C keresztmetszetbeli reakcióerőket a nyomatéki tétel segítségével! Mivel a szerkezet egyensúlyban van, ezért minden pontjában az össz-forgatónyomaték nulla.

Tekintsük először úgy a rendszert, mintha csak a **q** megoszló erőrendszer hatna a tartóra (68. ábra). A **q** egyenletesen megoszló erőrendszer helyettesíthető a támadásvonal középpontjában egy $Q = 2\ell q$ nagyságú koncentrált erővel. A nyomatéki tétel segítségével kiszámíthatók a kényszereken fellépő reakcióerők:

(501) $$M_{\mathrm{A}} = 0 = -\ell Q + 2\ell F_{\mathrm{C}}$$

(502) $$F_{\mathrm{C}} = \frac{Q}{2}$$



68. ábra

Mivel a függőleges irányú erők összege 0, ezért

(503) $$F_{\mathrm{A}} + F_C = Q$$

(504) $$F_{\mathrm{A}} = \frac{Q}{2}$$

Ezt az eredményt természetesen megkaphatjuk a C keresztmetszetre felírt nyomatéki tétel segítségével is. A hajlítónyomaték a megoszló erőrendszer negatív és a kényszereken ható (koncentrált) reakcióerők pozitív hajlítónyomatékának összege. A megoszló erőrendszerből származó hajlítónyomaték-járulék maximumát a B keresztmetszetnél veszi fel, értéke itt

(505) $$M_{\mathrm{h,B},q} = \frac{Q\ell}{4}$$

A koncentrált reakcióerőkből származó hajlítónyomaték-járulék szintén a B keresztmetszetnél maximális, értéke

(506) $$M_{\mathrm{h,B},F} = \ell F_{\mathrm{A}} = \ell F_{\mathrm{C}}$$

A külső terhelő megoszló erőrendszerből származó hajlítónyomaték-járulékot és ezen erőrendszer hatására a kényszerekben fellépő reakcióerőkből származó hajlítónyomaték-járulékot a 68. ábrán külön-külön ábrázolva láthatjuk.

A megoszló erőrendszerből származó hajlítónyomaték-járulék függvénye az A és a B, valamint a B és a C keresztmetszetek között:

(507) $$M_{q1}(x) = -\frac{q(x+\ell)^2}{2} = -\frac{(x+\ell)^2 Q}{4\ell}$$

(508) $$M_{q2}(x) = -\frac{q(x-\ell)^2}{2} = -\frac{(x-\ell)^2 Q}{4\ell}$$

alakú, míg a koncentrált reakcióerőkből származó hajlítónyomaték-járulék függvénye az A és a B, valamint a B és a C keresztmetszetek között:

(509) $$M_{F1}(x) = (x+\ell) F_{\mathrm{A}} = \frac{Q(x+\ell)}{2}$$

(510) $$M_{F2}(x) = -(x-\ell) F_{\mathrm{A}} = -\frac{Q(x-\ell)}{2}$$

A hajlítónyomatékot a tartó tengelye mentén leíró függvények a tartó két szakaszára tehát:

(511) $$M_1(x) = M_{q1}(x) + M_{F1}(x) = -\frac{(x+\ell)^2 Q}{4\ell} + \frac{Q(x+\ell)}{2} = -\frac{Q x^2}{4\ell} + \frac{Q\ell}{4}$$

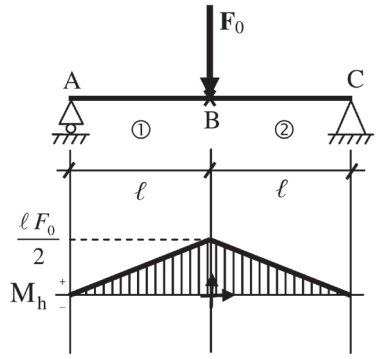
(512) $$M_2(x) = M_{q2}(x) + M_{F2}(x) = -\frac{(x-\ell)^2 Q}{4\ell} - \frac{Q(x-\ell)}{2} = -\frac{Q x^2}{4\ell} + \frac{Q\ell}{4}$$

Azt látjuk tehát, hogy a megoszló erőrendszer hajlítónyomaték-járuléka a teljes tartón azonos.

Tekintsük most úgy a rendszert, mintha csak az $\mathbf{F}_0$ koncentrált erő hatna a tartóra (69. ábra). A nyomatéki tétel segítségével kiszámíthatók a kényszereken fellépő reakcióerők:

(513) $$M_{\mathrm{A}} = 0 = -\ell F_0 + 2\ell F_{\mathrm{C}}$$

(514) $$F_C = \frac{F_0}{2}$$



69. ábra

Mivel a függőleges irányú erők összege 0, ezért

(515) $$F_A + F_C = F_0$$

(516) $$F_A + \frac{F_0}{2} = F_0$$

(517) $$F_A = \frac{F_0}{2}$$

Ezeket az eredményeket természetesen megkaphatjuk a C keresztmetszetre felírt nyomatéki tétel segítségével is. Így a B keresztmetszetbeli hajlítónyomaték (akár jobbról, akár balról számolva):

(518) $$M_{h,B} = +\ell F_A = +\ell F_C = \frac{\ell F_0}{2}$$

A hajlítónyomatéki ábra lineáris (a tartó két szabad végénél nulla értékkel), hiszen koncentrált erőről van szó. Mivel az $M(x)$ függvénynek törése van a B keresztmetszetnél, a két szakasz egyenletét külön-külön kell meghatározni. Jelöljük a bal oldali, A keresztmetszethez közelebbi részt $M_1(x)$-szel, a jobb oldali, C keresztmetszethez közelebbi részt $M_2(x)$-szel. Ugyanazt a koordináta-rendszert felvéve, mint az előbb, a két egyenes egyenlete:

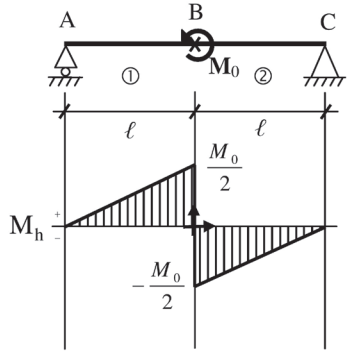
(519) $$M_1(x) = (x + \ell)\frac{F_0}{2}$$

(520) $$M_2(x) = -(x - \ell)\frac{F_0}{2}$$

Végül tekintsük úgy a rendszert, mintha csak az $\mathbf{M}_0$ koncentrált hajlítónyomaték hatna a tartóra (70. ábra). Ekkor a nyomatéki tétel segítségével a kényszereken fellépő reakcióerők:

(521) $$M_A = 0 = M_0 + 2\,\ell\,F_C$$

(522) $$F_C = -\frac{M_0}{2\,\ell}$$



70. ábra

Mivel a függőleges irányú erők összege 0, ezért

(523) $$F_A + F_C = 0$$

(524) $$F_A - \frac{M_0}{2\,\ell} = 0$$

(525) $$F_A = \frac{M_0}{2\,\ell}$$

Ezt az eredményt természetesen megkaphatjuk a C keresztmetszetre felírt nyomatéki tétel segítségével is. Így a B keresztmetszetbeli hajlítónyomaték (akár jobbról, akár balról számolva):

(526) $$M_{\mathrm{h,B},\leftarrow} = +\ell\, F_{\mathrm{A}} = \ell \frac{M_0}{2\,\ell} = \frac{M_0}{2}$$

(527) $$M_{\mathrm{h,B},\rightarrow} = +\ell\, F_{\mathrm{C}} = \ell \frac{M_0}{2\,\ell} = -\frac{M_0}{2}$$

A hajlítónyomatéki ábra lineáris, a B keresztmetszetben egy $-M_0$ nagyságú ugrással. Ismét az eddig használt koordináta-rendszert felvéve a két egyenes egyenlete:

(528) $$M_1(x) = (x+\ell)\frac{M_0}{2\,\ell}$$

(529) $$M_2(x) = (x-\ell)\frac{M_0}{2\,\ell}$$

Mindezek alapján a három hajlítónyomaték-komponens összege külön az 1-es és külön a 2-es szakaszra:

(530) $$M_1(x) = -x^2\frac{Q}{4\,\ell} + \ell\frac{Q}{4} + x\frac{F_0}{2} + \ell\frac{F_0}{2} + x\frac{M_0}{2\,\ell} + \frac{M_0}{2}$$

(531) $$M_2(x) = -x^2\frac{Q}{4\,\ell} + \ell\frac{Q}{4} - x\frac{F_0}{2} + \ell\frac{F_0}{2} + x\frac{M_0}{2\,\ell} - \frac{M_0}{2}$$

Nézzük először az 1-es tartománynak a hatását. Ehhez először számítsuk ki az $M_1^2(x)$ függvényt:

(532) $$M_1^2(x) = \frac{Q^2}{16\,\ell^2}x^4 + \frac{Q^2}{16}\ell^2 + \frac{F_0^2}{4}x^2 + \frac{F_0^2\,\ell^2}{4} + \frac{M_0^2}{4\,\ell^2}x^2 + \frac{M_0^2}{4} - \frac{Q^2}{8}x^2 -$$
$$- \frac{Q\,F_0}{4\,\ell}x^3 - \frac{Q\,F_0}{4}x^2 - \frac{Q\,M_0}{4\,\ell^2}x^3 - \frac{Q\,M_0}{4\,\ell}x^2 + \frac{Q\,F_0\,\ell}{4}x + \frac{Q\,F_0\,\ell^2}{4} + \frac{Q\,M_0}{4}x +$$
$$+ \frac{Q\,M_0\,\ell}{4} + \frac{F_0^2\,\ell}{2}x + \frac{F_0\,M_0}{2\,\ell}x^2 + \frac{F_0\,M_0}{2}x + \frac{F_0\,M_0}{2}x + \frac{F_0\,M_0\,\ell}{2} + \frac{M_0^2}{2\,\ell}x$$

A W_1 belső munkát az $M_1^2(x)$ függvénynek a tartó bal széle és a B keresztmetszet közötti, ℓ hosszúságú szakaszon vett határozott integráljának kiszámításával tudjuk meghatározni (egy $1/2IE$ faktorral beszorozva):

(533) $$W_1 = \frac{1}{2IE}\int_{-\ell}^{0} M_1^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2IE}\left[\left(\frac{Q^2}{16\ell^2}\right)\frac{x^5}{5} + \left(-\frac{QF_0}{4\ell} - \frac{QM_0}{4\ell^2}\right)\frac{x^4}{4} + \right.$$
$$+\left(\frac{F_0^2}{4} + \frac{M_0^2}{4\ell^2} - \frac{Q^2}{8} - \frac{QF_0}{4} - \frac{QM_0}{4\ell} + \frac{F_0M_0}{2\ell}\right)\frac{x^3}{3} +$$
$$+\left(\frac{QF_0\ell}{4} + \frac{QM_0}{4} + \frac{F_0^2\ell}{2} + \frac{F_0M_0}{2} + \frac{F_0M_0}{2} + \frac{M_0^2}{2\ell}\right)\frac{x^2}{2} +$$
$$\left.+\left(\frac{Q^2}{16}\ell^2 + \frac{F_0^2\ell^2}{4} + \frac{M_0^2}{4} + \frac{QF_0\ell^2}{4} + \frac{QM_0\ell}{4} + \frac{F_0M_0\ell}{2}\right)x\right]_{-\ell}^{0}$$

(534) $$W_1 = \frac{1}{2IE}\left(\frac{Q^2\ell^3}{80} + \frac{QF_0\ell^3}{16} + \frac{QM_0\ell^2}{16} + \frac{F_0^2\ell^3}{12} + \frac{M_0^2\ell}{12} - \frac{Q^2\ell^3}{24} - \frac{QF_0\ell^3}{12} - \right.$$
$$-\frac{QM_0\ell^2}{12} + \frac{F_0M_0\ell^2}{6} - \frac{QF_0\ell^3}{8} - \frac{QM_0\ell^2}{8} - \frac{F_0^2\ell^3}{4} - \frac{F_0M_0\ell^2}{4} - \frac{F_0M_0\ell^2}{4} -$$
$$\left. - \frac{M_0^2\ell}{4} + \frac{Q^2\ell^3}{16} + \frac{F_0^2\ell^3}{4} + \frac{M_0^2\ell}{4} + \frac{QF_0\ell^3}{4} + \frac{QM_0\ell^2}{4} + \frac{F_0M_0\ell^2}{2}\right)$$

A Castigliano-tételek alapján a kérdéses keresztmetszet (jelen esetben a „B”) lehajlása és szögelfordulása a W_1 belső munkának az adott keresztmetszetben ható koncentrált erő (az F_0) és koncentrált forgatónyomaték (az M_0) szerinti parciális deriváltja. Mivel $\mathbf{F}_0$ és $\mathbf{M}_0$ az eredeti feladatban nem szerepelt, csak mi adtuk hozzá a rendszerhez ezen deriválás elvégezhetőségének érdekében, ezért a deriválás után ezek helyére nullát helyettesítünk:

(535) $$f_1 = \left.\frac{\partial W_1}{\partial F_0}\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} = \frac{1}{2IE}\left(\frac{Q\ell^3}{16} + \frac{F_0\ell^3}{6} - \frac{Q\ell^3}{12} + \frac{M_0\ell^2}{6} - \frac{Q\ell^3}{8} - \right.$$
$$\left. - \frac{F_0\ell^3}{2} - \frac{M_0\ell^2}{4} - \frac{M_0\ell^2}{4} + \frac{F_0\ell^3}{2} + \frac{Q\ell^3}{4} + \frac{M_0\ell^2}{2}\right)\Bigg|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} =$$
$$= \frac{1}{2IE}\left(\frac{Q\ell^3}{16} - \frac{Q\ell^3}{12} - \frac{Q\ell^3}{8} + \frac{Q\ell^3}{4}\right) = \frac{1}{2IE}\left(\frac{5Q\ell^3}{48}\right) = \frac{5Q\ell^3}{96IE}$$

(536)
$$\varphi_1 = \left.\frac{\partial W_1}{\partial M_0}\right|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} = \frac{1}{2IE}\left(\frac{Q\ell^2}{16} + \frac{M_0\,\ell}{6} - \frac{Q\ell^2}{12} - \frac{Q\ell^2}{8} - \right.$$
$$\left. - \frac{F_0\ell^2}{4} - \frac{F_0\ell^2}{4} - \frac{M_0\ell}{2} + \frac{M_0\,\ell}{2} + \frac{Q\ell^2}{4} + \frac{F_0\ell^2}{2}\right)\Bigg|_{\substack{F_0=0\\M_0=0}} =$$
$$= \frac{1}{2IE}\left(\frac{Q\ell^2}{16} - \frac{Q\ell^2}{12} - \frac{Q\ell^2}{8} + \frac{Q\ell^2}{4}\right) = \frac{1}{2IE}\,\frac{5Q\ell^2}{48} = \frac{5Q\ell^2}{96IE}$$

Hasonlóan végigszámolva a másik tartórészre kapjuk:

(537)
$$f_2 = \frac{5Q\ell^3}{96IE}$$

(538)
$$\varphi_2 = \frac{-5Q\ell^2}{96IE}$$

A B keresztmetszet lehajlását és szögelfordulását a két fél tartóból számolt f és φ értékek összegeként kapjuk:

(539)
$$f = f_1 + f_2 = \frac{5Q\ell^3}{96IE} + \frac{5Q\ell^3}{96IE} = \frac{5Q\ell^3}{48IE}$$

(540)
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{5Q\ell^2}{96IE} - \frac{5Q\ell^2}{96IE} = 0$$

Az eredményben nem meglepő, hogy $f_1 = f_2$, hiszen a B keresztmetszet pont a tartó szimmetriatengelyében helyezkedik el, ezért a két oldalnak ugyanakkora járulékot kell adnia a lehajlásához.

Szintén érthető, hogy példánk esetében a $\varphi_1 = -\varphi_2$ eredménynek kellett kijönnie: a tartó középső, szimmetriatengelyére eső keresztmetszetéről intuitíven is látjuk, hogy $\varphi = 0$, hiszen ez a keresztmetszet az egyenletesen megoszló terhelés hatására is vízszintes lesz: nem fordul el, csak lehajlik.

11. Statikailag határozatlan szerkezetek

Ahogy a statika tárgyalásánál láttuk, egy szerkezet szabadsági fokainak kényszerekkel való lekötése feltétele annak, hogy az adott szerkezetet statikailag határozottnak nevezzük. Ha azonban a kényszerek nem pontosan annyi szabadsági fokot kötnek le, mint amennyi a szerkezetnek van, hanem többet, a szerkezetet statikailag határozatlannak nevezzük (továbbra is feltételezve, hogy a szerkezet egyensúlyban van). Ebben az esetben ugyanis az egyensúlyi egyenletek nem elegendőek a reakcióerők meghatározásához.

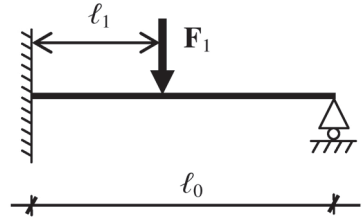
Tekintsünk egy egyszerű, prizmatikus rúd alakú tartót. Kiterjedt síkbeli szerkezet lévén három szabadsági foka van. Ha mindkét végén csuklóval támasztjuk alá, azzal összesen négy szabadsági fokot kötünk le, ami eggyel több, mint a szerkezet szabadsági fokainak a száma, ezért ezt statikailag egyszeresen határozatlan szerkezetnek nevezzük. A négy szabadsági fok lekötése miatt négy reakcióerő (a két csuklóban fellépő vízszintes és függőleges irányú erők) meghatározása szükséges. Azonban felírva a függőleges, a vízszintes irányú erők összegének zérus voltára és a két csuklón fellépő forgatónyomatékok zérus voltára vonatkozó egyensúlyi egyenleteket, azt találjuk, hogy az egyenleteink nem adnak megoldást, mivel az így felírt négy egyenlet lineárisan összefüggő.

Szükséges tehát valamilyen más módszert alkalmazni ezek meghatározásához. Jelen jegyzetben csak az úgynevezett erőmódszert fogjuk tárgyalni egyszeresen határozatlan szerkezetekre, de az elv általánosan alkalmazható bonyolultabb és többszörösen határozatlan tartókra is. Az úgynevezett elmozdulásmódszerrel, amely egy másik, azonos eredményt adó eljárás a reakcióerők meghatározására, itt nem foglalkozunk.

11.1. Görgő elhagyása

Az erőmódszer elvét a következőkben egy, a végén görgővel alátámasztott befogott tartóra, azaz egy egyszeresen határozatlan szerkezet esetén

vizsgáljuk (lásd 71. ábra). Legyen a tartó hossza ℓ_0, és hasson rá függőlegesen a befogástól ℓ_1 távolságra egy $\mathbf{F}_1$ erő.

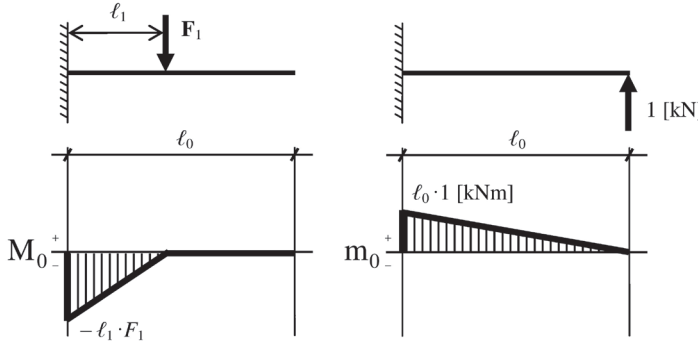


71. ábra

Első lépésben a tartót statikailag határozottá kell tenni. Ehhez eltávolítunk egy szabadsági foknak megfelelő kényszert. Az így kapott tartót törzstartónak nevezzük. Jelen esetben kétféleképpen választhatunk: vagy egyszerűen a görgőt távolítjuk el, vagy a befogást kicseréljük csuklóra. Válasszuk az elsőt.

Eltávolítjuk tehát a görgőt, és két különböző terhelésre határozzuk meg a törzstartó hajlítónyomatéki ábráját (72. ábra).

1. Csak az eredeti terhelést figyelembe véve. Jelöljük az ezt az esetet leíró hajlítónyomatéki függvényt $M_0(x)$-szel.
2. Az eltávolított kényszer helyére egy „1” nagyságú erőt mint külső terhelést téve (amit abban a mértékegységben kell számolni, amelyben a másik tartót). Jelöljük az ezt az esetet leíró hajlítónyomatéki függvényt $m_0(x)$-szel.



72. ábra

Ezután felírjuk mind az $M_0(x)$, mind az $m_0(x)$ függvény konkrét alakját a tartó mentén úgy, hogy a koordináta-rendszert azonosnak választjuk mindkét esetben. Jelen esetben célszerű az origót a befogáshoz felvenni. Ekkor

$$M_0(x) = (x - \ell_1)\frac{\ell_1 F_1}{\ell_1} = (x - \ell_1)F_1, \quad \text{ha} \quad 0 \le x \le \ell_1 \tag{541}$$

és

$$M_0(x) = 0, \quad \text{ha} \quad \ell_1 \le x \le \ell_0 \tag{542}$$

valamint

$$m_0(x) = (x - \ell_0)\frac{\ell_0 \cdot 1}{\ell_0} = (x - \ell_0), \quad \text{ha} \quad 0 \le x \le \ell_0 \tag{543}$$

A helyettesített kényszer helyén fellépő $\mathbf{F}_r$ reakcióerő nagysága ezek ismeretében a következő módon határozható meg:

$$F_r = -\frac{\int M_0(x) m_0(x)\,\mathrm{d}x}{\int m_0^2(x)\,\mathrm{d}x} \tag{544}$$

ahol az integrálást a tartó teljes hosszán kell elvégezni. A számláló a (488) alapján a terhelő erőrendszernek a helyettesítő erőn végzett idegen munkája, a nevező pedig a (489) egyenlet szerint a helyettesítő erő saját munkája. A két munka hányadosa megmutatja, hogy a reakcióerő a helyettesítő erő hányszorosa: mivel a helyettesítő erőt egységnyi nagyságúnak választottuk, ezért a számolás végén közvetlenül a reakcióerő nagyságát kapjuk meg.

Az $M_0(x)$ és $m_0(x)$ függvények azonban két tartományt határoznak meg x-ben: $0 \le x \le \ell_1$ és $\ell_1 \le x \le \ell_0$. Ezekre külön-külön kell elvégezni az integrálást, majd az eredményeket összeadni:

(545)
$$F_{\mathrm{r}} = -\frac{\int_0^{\ell_1} M_0(x)m_0(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1}^{\ell_0} M_0(x)m_0(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\ell_1} m_0^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1}^{\ell_0} m_0^2(x)\,\mathrm{d}x} =$$

$$= -\frac{\int_0^{\ell_1} (x-\ell_1)F_1(x-\ell_0)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1}^{\ell_0} 0\,(x-\ell_0)\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\ell_0} (x-\ell_0)^2\,\mathrm{d}x} =$$

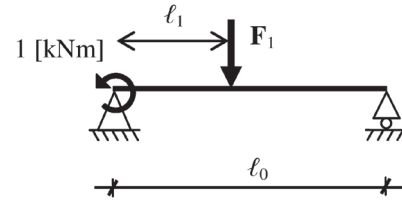
$$= -\frac{F_1\int_0^{\ell_1} x^2 - x\ell_0 - x\ell_1 + \ell_0\ell_1\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\ell_0} x^2 - 2x\ell_0 + \ell_0^2\,\mathrm{d}x} =$$

$$= -\frac{F_1\left(\frac{\ell_1^3}{3} - \frac{\ell_1^2\ell_0}{2} - \frac{\ell_1^3}{2} + \ell_0\ell_1^2\right)}{\frac{\ell_0^3}{3} - \ell_0^3 + \ell_0^3}$$

amely, mivel F_1, ℓ_0 és ℓ_1 mind ismert, már kiszámítható. F_{r} ismeretében pedig már felrajzolható az eredeti szerkezet nyíróerő- és hajlítónyomatéki ábrája is: a görgőt az $\mathbf{F}_{\mathrm{r}}$ erővel helyettesítve megoldjuk az így kapott kéttámaszú tartót, és a számolás végén $\mathbf{F}_{\mathrm{r}}$-t a görgőn fellépő reakcióerővel azonosítjuk.

11.2. Befogás helyettesítése csuklóval

Azonban helyettesíthettük volna a befogást is csuklóval, az is az eredeti feladat törzstartója lenne. Ekkor egy „1” nagyságú forgatónyomatékot kell hozzáadni a rendszerhez a csuklónál, hiszen a fal egy forgatónyomatékkal köt le többet, mint egy csukló (73. ábra).



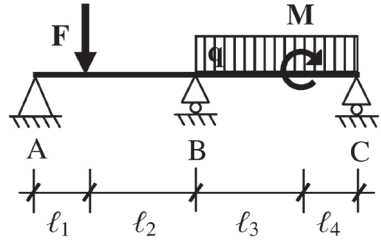
73. ábra

Felírva a törzstartón a forgatónyomaték nulla voltát a csuklóra vagy a görgőre, valamint a függőleges irányú erők összegének nulla voltát mind az eredeti terheléssel a helyettesített 1 nagyságú forgatónyomaték nélkül, mind csak a bevezetett 1 nagyságú terheléssel, meghatározhatjuk a kényszereken fellépő reakcióerőket. Ezek alapján fel tudjuk rajzolni az $M_0(x)$ és az $m_0(x)$ függvényekkel jellemezhető hajlítónyomatéki ábrákat, amelyeket jellemző függvényeket egy koordináta-rendszerben felírva és az (544) egyenlet szerinti integrált elvégezve (ha a hajlítónyomatéki függvények változása miatt szükséges, a tartó egyes szakaszaira külön-külön) megkapjuk a befogásnál fellépő forgatónyomaték valódi értékét. Ennek ismeretében ismét felírva a törzstartóra, mint kéttámaszú tartóra, a forgatónyomaték nulla voltát a csuklóra vagy a görgőre (az előbb megkapott forgatónyomatékot külső terhelő koncentrált forgatónyomatékként kezelve), majd a függőleges irányú erők összegének nulla voltát, a kényszereken fellépő reakcióerők meghatározhatóak.

A két módszerrel, azaz egy görgő elhagyásával vagy a befogás csuklóval való helyettesítésével kapott eredményeknek meg kell egyezniük.

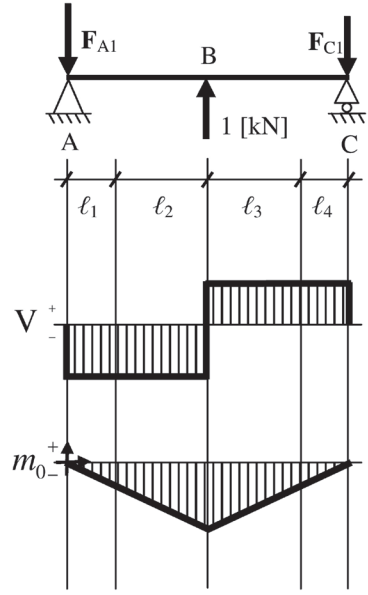
11.3. Megoszló erőrendszer kezelése

Ha egy tartó megoszló erőrendszerrel és koncentrált forgatónyomatékkal is terhelt, a megoldás menete hasonló. A 74. ábrán látható tartónak három szabadsági foka van, míg a fix csukló és a két görgő négyet köt le, a szerkezet tehát statikailag egyszeresen határozatlan. A törzstartót egy szabadsági fokot lekötő kényszer, azaz az egyik görgő elhagyásával kapjuk, mivel a fix csukló görgővel való helyettesítése elmozduló szerkezetet eredményezne.



74. ábra

Válasszuk a B keresztmetszetnél található görgőt. Ezt egy 1 nagyságú erővel helyettesítve megoldjuk a kapott kéttámaszú tartót (75. ábra).



75. ábra

Felírva az A és a C keresztmetszetekre a forgatónyomatékok nulla voltát (mivel egyensúlyban vagyunk), két egyismeretlenes egyenletet kapunk, amelyekből F_{A1} és F_{C1} meghatározható:

(546) $$M_A = 0 = (\ell_1 + \ell_2)\cdot 1 - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)F_{C1}$$

(547) $$M_C = 0 = -(\ell_3 + \ell_4)\cdot 1 - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)F_{A1}$$

A hajlítónyomaték maximális értéke, amely a B keresztmetszetnél lép fel, ezekből meghatározható:

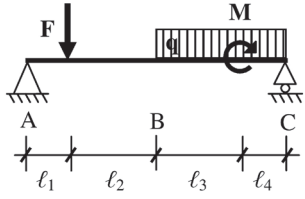
(548) $$M_{h1} = -(\ell_1 + \ell_2)\cdot F_{A1} = -(\ell_3 + \ell_4)F_{C1}$$

Felvéve egy koordináta-rendszert, az egyes szakaszokon a hajlítónyomatéki függvények felírhatók:

(549) $$m_1(x) = m_2(x) = -x\frac{|M_{h1}|}{\ell_1 + \ell_2}$$

(550) $$m_3(x) = m_4(x) = (x - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4))\frac{|M_{h1}|}{\ell_3 + \ell_4}$$

Ezután oldjuk meg a törzstartót az eredeti terheléssel (76. ábra).



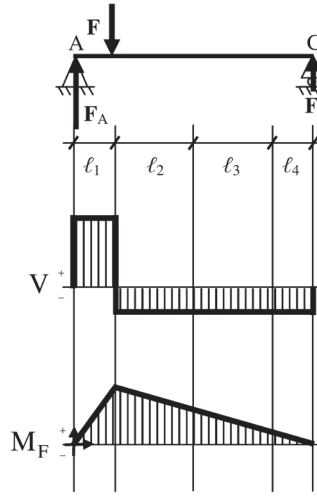
76. ábra

Itt azonban meg kell határozni a koncentrált **F** erőből, a megoszló **q** erőrendszerből és a koncentrált **M** forgatónyomatékból adódó hajlítónyomaték-járulékokat is. Additív mennyiségről lévén szó, végezzük el ezeket külön-külön.

Csak a koncentrált **F** erőt figyelembe véve (77. ábra) ismét felírhatjuk a kéttámaszú tartó A és C keresztmetszeteire a forgatónyomaték nulla voltát, amelyből F_A és F_C azonnal adódik:

(551) $$M_A = 0 = -\ell_1 F + (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)F_C$$

(552) $$M_C = 0 = (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4)F - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)F_A$$



77. ábra

A maximális hajlítónyomaték az **F** erő támadáspontjánál lép fel, értéke:

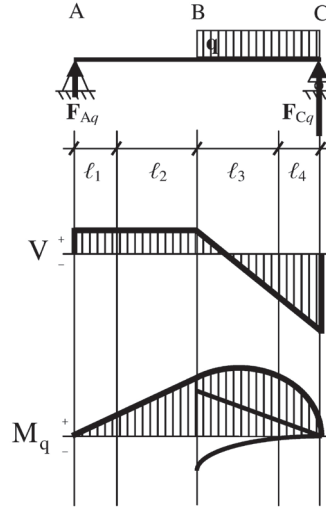
(553) $$M_{\mathrm{h}2} = \ell_1 F_{\mathrm{A}} = \left(\ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right) F_{\mathrm{C}}$$

Felvéve ugyanazt a koordináta-rendszert, amelyet az $m(x)$ függvények felírásánál már használtunk, felírhatóak a hajlítónyomatéki függvények:

(554) $$M_{1F}(x) = x\frac{|M_{\mathrm{h}2}|}{\ell_1}$$

(555) $$M_{2F}(x) = M_{3F}(x) = M_{4F}(x) = -\left(x - \left(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right)\right)\frac{|M_{\mathrm{h}2}|}{\ell_2 + \ell_3 + \ell_4}$$

A megoszló erőrendszer hajlítónyomaték-járuléka két komponensből áll: magának a megoszló erőrendszernek a parabolikus és a támaszokon fellépő reakcióerőknek a lineáris járulékából (78. ábra).



78. ábra

Először megoldva a kéttámaszú tartót, a kényszereken fellépő reakcióerők meghatározhatóak:

(556) $$M_{\mathrm{A}} = 0 = -(\ell_3 + \ell_4)q\left(\ell_1 + \ell_2 + \frac{\ell_3 + \ell_4}{2}\right) + (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)F_{Cq}$$

(557) $$M_{\mathrm{C}} = 0 = -(\ell_3 + \ell_4)q\left(\frac{\ell_3 + \ell_4}{2}\right) + (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)F_{Aq}$$

A B keresztmetszetben a hajlítónyomaték értéke balról számolva:

(558) $$M_{\mathrm{h}3} = (\ell_1 + \ell_2)F_{Aq}$$

amelyből két szakaszra a hajlítónyomatéki függvény felírható:

(559) $$M_{1q}(x) = M_{2q}(x) = x\frac{|M_{\mathrm{h}3}|}{\ell_1 + \ell_2}$$

A másik két szakaszra külön kell bontani a megoszló erőrendszer és a koncentrált reakcióerő járulékát.

A B keresztmetszetben a koncentrált reakcióerőből származó hajlítónyomaték értéke jobbról számolva:

(560) $$M_{\mathrm{h}4} = (\ell_3 + \ell_4) F_{Cq}$$

amelyből a hajlítónyomatéki függvény járuléka:

(561) $$M_{3qF}(x) = M_{4qF}(x) = -(x - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4)) \frac{|M_{\mathrm{h}4}|}{\ell_3 + \ell_4}$$

A B keresztmetszetben a megoszló erőrendszerből származó hajlítónyomaték értéke jobbról számolva:

(562) $$M_{\mathrm{h}5} = (\ell_3 + \ell_4) q \frac{\ell_3 + \ell_4}{2}$$

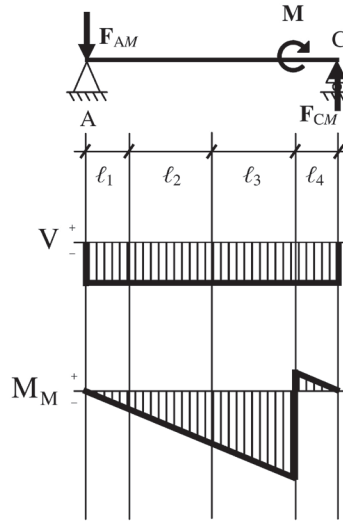
amelyből a hajlítónyomatéki függvény járuléka:

(563) $$M_{3qq}(x) = M_{4qq}(x) = -(x - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4))^2 \frac{|M_{\mathrm{h}5}|}{(\ell_3 + \ell_4)^2}$$

Ezen a két szakaszon a hajlítónyomatéki függvények ezek összegei:

(564) $$M_{3q}(x) = M_{4q}(x) = M_{3qF}(x) + M_{3qq}(x) = M_{4qF}(x) + M_{4qq}(x)$$

Végül vizsgáljuk csak a koncentrált forgatónyomaték hatását (79. ábra).



79. ábra

A kényszereken fellépő reakcióerők egyszerűen számíthatóak:

(565) $$M_{\mathrm{A}} = 0 = -M + \left(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right) F_{CM}$$

(566) $$M_{\mathrm{C}} = 0 = -M + \left(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right) F_{\mathrm{A}M}$$

A koncentrált forgatónyomaték helyén fellépő hajlítónyomaték balról, illetve jobbról számolva:

(567) $$M_{\mathrm{h}6} = -\left(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3\right) F_{\mathrm{A}M}$$

(568) $$M_{\mathrm{h}7} = \ell_4 \, F_{CM}$$

A hajlítónyomatéki függvények:

(569) $$M_{1M}(x) = M_{2M}(x) = M_{3M}(x) = -x \frac{\left|M_{\mathrm{h}6}\right|}{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}$$

(570) $$M_{4M}(x) = -\left(x - \left(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4\right)\right) \frac{\left|M_{\mathrm{h}7}\right|}{\ell_4}$$

A négy hajlítónyomatéki függvény a törzstartón az eredeti terhelésre az egyes járulékok összege:

(571) $$M_i(x) = M_{iF}(x) + M_{iq}(x) + M_{iM}(x) \quad i = 1..4$$

Az eredeti, statikailag határozatlan tartó esetén a B keresztmetszeten fellépő F_{B} reakcióerőt az alábbi integrál kiértékelésével kaphatjuk meg:

(572) $$F_{\mathrm{B}} = -\frac{\int_0^{\ell_1} m_1(x) M_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} m_2(x) M_2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1+\ell_2}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} m_3(x) M_3(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1+\ell_2+\ell_3}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4} m_4(x) M_4(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\ell_1} m_1^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} m_2^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1+\ell_2}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} m_3^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\ell_1+\ell_2+\ell_3}^{\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4} m_4^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Ezt az erőt innentől kezdve úgy tekinthetjük, mint a görgő helyett a rendszerben lévő konstans külső terhelő erőt, és a tartó egyszerű kéttámaszú statikailag határozott tartóként megoldható.

Ezzel ekvivalens eredményre jutunk, ha nem a B keresztmetszetben, hanem a C keresztmetszetnél található görgőt hagyjuk el. Bár a számolás során más lesz az $M_0(x)$ és az $m_0(x)$ hajlítónyomatéki függvény is, az (572) kifejezéshez hasonlóan meghatározott F_{C} erő meg fog egyezni az előbbi számolás végén kapott eredménnyel.

Vákát oldal

12. Kifáradás

A méretezésnél mindig a megengedett feszültséget vesszük alapul. Ennek ellenére előfordul, hogy olyan alkatrészek, amelyek bár helyesen is lettek méretezve, a megengedettnél nagyobb feszültség soha nem is hatott rájuk, mégis eltörnek. Az ilyen, az ismételt igénybevételek során halmozódó károsodások hatására a folyáshatárnál kisebb feszültség esetén bekövetkező töréseket fáradásos törésnek nevezzük. Az ilyen típusú törések a törési károk kb. 90%-áért felelősek. Ebben a fejezetben ezek fajtáit, a bekövetkezésükhöz vezető folyamatokat és ezek okait fogjuk megvizsgálni.

Először a 20. század elején tapasztalták megfelelően méretezett szerkezetek feszültségtúllépéssel megmagyarázhatatlan töréseit: az addiginál nagyobb sebességű vonatok által használt pályákon síntörések következtek be, vagy például nagy fordulatszámú tengelyeken először repedések jelentek meg, majd el is törtek a tengelyek. A törési felületek vizsgálatánál kiderült, hogy ezeknek csak egy része friss törés kristályos felülettel, a többi része már oxidált volt, azaz a törés egy hosszú repedési folyamatnak csak a végét jelenti.

12.1. A fáradásos törések fizikai mechanizmusa

Nincsen tökéletes anyag. Még a legpontosabban gyártott alkatrészek felületén is találhatók mikrorepedések, felületi egyenetlenségek, amelyek elsősorban a nyírófeszültségekre érzékenyek. Ezeken a helyeken, bár csak minimálisan, de kisebb a keresztmetszet, ezért itt a terhelés hatására fellépő feszültség is nagyobb lesz. Az anyagban levő vonalhibák, az úgynevezett diszlokációk, amelyek a keménységért is felelősek, ráadásul szintén megakadnak ezeken a repedéseken, így a feszültség előbb-utóbb lokálisan túllépi a folyáshatárt, így terhelés hatására a repedés továbbterjed.

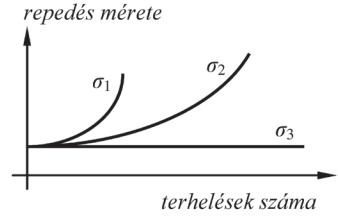
Ötvözetek esetében idővel kiválások, úgynevezett precipitációk jöhetnek létre. Ezek szintén diszlokációgyűjtő tulajdonságuk miatt járulnak hozzá a feszültség lokális növekedéséhez és repedések kialakulásához, terjedéséhez.

De ugyanilyen hatásuk van a kis sugarú lekerekítéseknek, furatoknak, meneteknek vagy karcolásoknak, zárványoknak.

Ha a mikrorepedés elér egy bizonyos méretet, már nem elsősorban a nyíró-, hanem a húzófeszültségek fogják megszabni a terjedését. Ekkor a növekedésének iránya a maximális húzófeszültség irányára merőleges lesz. Innentől nevezzük makrorepedésnek. Amikor a keresztmetszet nagysága lokálisan elegendően lecsökken, az addig elviselt terhelés hatására bekövetkezik a törés. Emellett még egy alkatrész véletlen túlterhelése is létrehozhat mikrorepedéseket, amelyek normál üzemmenet mellett a fent ismertetett módon továbbterjedhetnek a törésig.

12.2. A terhelések ismétlésszámának hatása a repedésnövekedésre

Fontos az anyag fáradásának időbeli előrehaladása szempontjából az is, hogy a terhelő feszültség (ami alatt itt a terhelő erőkből és forgatónyomatékokból a tartó nominális, hibamentes átmérője alapján számolt feszültségértéket értjük) mennyire közelíti meg a megengedett feszültséget. A 80. ábrán ennek a jelenségnek egy kvalitatív bemutatása látható. Ha egy kezdetben adott nagyságú repedésre nagyságrendileg 10^5–10^6 alkalommal különböző nagyságú feszültségeket létrehozó terhelések hatnak, akkor a repedés méretének változása függni fog az adott terhelő feszültség nagyságától. A konkrét kísérleti eredmények azt mutatják, hogy bár a repedés növekedése exponenciális jellegű, a folyamat elején a repedés mérete minden feszültség esetében lineárisan változik.



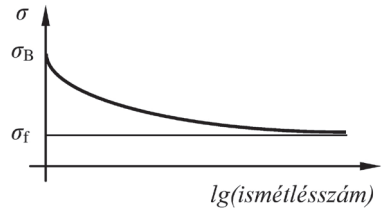
80. ábra

Ha $\sigma_{meg} > \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, akkor minél nagyobb a terhelő feszültség, annál kevesebb számú terhelés hatására fogja elérni a repedés mérete azt a kritikus értéket, amikor a keresztmeszet-csökkenés hatására a feszültség abban

a konkrét keresztmetszetben túllépi a megengedett feszültséget, és az anyag eltörik. Kisebb terhelő feszültségek esetében a repedés nemcsak lassabban terjed, hanem nagyobb végső méretet is elérhet, hiszen ekkor a kisebb terhelőfeszültség miatt a repedésnél található keresztmetszetben a feszültség jóval kisebb keresztmetszetnél éri csak el a törőfeszültség értékét. Van azonban egy határ, amelynél kisebb feszültségek (például a 80. ábrán a σ_3 esete) nem elegendőek az adott repedés méretének növeléséhez, így itt a terhelés lehetséges ismétléseinek száma praktikusan végtelen.

12.3. Kifáradási határ

Azt a feszültségértéket, amellyel végtelenszer terhelve az alkatrészt sem törik az el, kifáradási határfeszültségnek nevezzük, jele: σ_f. A 80. ábrán bemutatott, az egyes anyagok viselkedését kvalitatívan bemutató ábra alapjául szolgáló méréseket sok különböző nagyságú σ feszültségre elvégezve és a feszültségértékeket annak a terhelésszám logaritmusának a függvényében ábrázolva, amely alkalmazása töréshez vezetett, a 81. ábrán látható viselkedést tapasztaljuk. A σ_B törőfeszültséget egyszer alkalmazva is eltörik az anyag, a σ_f határfeszültség esetében viszont (csak önmagában a határfeszültség miatt) sosem.



81. ábra

12.4. A Wöhler-esetek

A különböző típusú anyagok ráadásul nem egyformán érzékenyek a különböző terhelési módokra. A 2.6.2. alfejezetben bemutatott Wöhler-esetek közül az első, a statikus veszi igénybe legkevésbé a szerkezeteket, a második és a harmadik esetekben már sokkal kisebb fellépő feszültség esetében is tönkremennek.

12.4.1. Lengőfeszültség

Ha egy alkatrészre olyan jellegű váltakozó feszültség hat, amely egy keresztmetszetet néha pozitív, néha negatív feszültséggel terhel, lengőfeszültségről beszélünk.

Ilyen például egy két végén ágyazott vízszintes forgó tengely, amelyre többirányú összetett igénybevételnek (húzás [nyomás] és hajlítás) van kitéve. Az egyes szálakat a szál pozíciójától függően (a semleges réteg fölött vagy alatt helyezkedik el éppen) húzó- vagy nyomófeszültség terheli. A tengely fél fordulata után azonban a feszültség előjele már ellentétes, így egy adott keresztmetszet minden pontja folyamatosan váltakozó irányú feszültségnek van kitéve (kivéve a semleges szálat). Hasonlóan, a nyírófeszültség iránya is a tengely forgásával váltakozik.

Jelöljük a tengelyre ható legnagyobb pozitív normális feszültséget σ_{max}-szal, a legnegatívabb normális feszültséget σ_{min}-nel. A lengőfeszültség definíciója szerint $\sigma_{max} > 0$ és $\sigma_{min} < 0$. A feszültség időbeli változása szinuszgörbét követ.

Definiáljuk a középfeszültséget mind normális, mind csúsztatófeszültségre:

(573) $$\sigma_m = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2}$$

A feszültségek középfeszültségtől való legnagyobb eltérését feszültségamplitúdónak nevezzük:

(574) $$\sigma_a = \max\left(\sigma_{max} - \sigma_m ; \sigma_m - \sigma_{min}\right)$$

Ha $\sigma_{max} - \sigma_m = \sigma_m - \sigma_{min}$, azaz $\sigma_m = 0$, akkor a terhelés szimmetrikus, és tiszta lengő igénybevételről beszélünk.

12.4.2. Lüktetőfeszültség

Ha az alkatrész csak egyik fajta előjelű feszültségnek van kitéve, azaz $\sigma_{max} \geq 0$ és $\sigma_{min} \geq 0$ vagy $\sigma_{max} \leq 0$ és $\sigma_{min} \leq 0$, akkor lüktetőfeszültségről beszélünk. Ilyen például egy felvonó drótkötele, amely csak húzófeszültségnek van kitéve. Ha $\sigma_{min} = 0$ vagy $\sigma_{max} = 0$, akkor a terhelés úgynevezett tiszta lüktető igénybevétel.

12.4.3. A kifáradási határ értelmezése nem statikus terhelésre

Az aszimmetrikus terhelést tehát egy állandó középfeszültség és egy szinuszos változó feszültség összegének tekinthetjük.

Lengő és lüktető igénybevétel esetében a konstans tag σ_m (amely tiszta lengő igénybevétel esetében nulla), a szinuszos tag amplitúdója pedig σ_a. Lengő igénybevétel esetén $\sigma_m - \sigma_a < 0$, lüktető igénybevétel esetén pedig $\sigma_m - \sigma_a \geq 0$. Ekkor a kifáradási határ valójában ezen két komponens összegének maximumát jelenti:

(575) $$\sigma_f = |\sigma_m| + \sigma_a$$

Ha a középfeszültség nulla, a kifáradási határt lengőszilárdságnak (σ_v) nevezzük. Ha $\sigma_m = \sigma_a$, a kifáradási határt lüktetőszilárdságnak (σ_r) nevezzük.

12.5. Terhelések jellemzése arányszámokkal

Az előbbiekben láthattuk, hogy a fáradásos törés bekövetkezésének idejét, illetve hogy egyáltalán bekövetkezik-e, a középfeszültség és a feszültségamplitúdó egyaránt befolyásolja. Ezen két feszültség aránya tehát fontos tényező, amelyet jelöljünk v-vel:

(576) $$v_\sigma = \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}}$$

A v arány értéke $-\infty$-től 1-ig változhat.

Statikus terhelésnél $v_\sigma = 1$, mivel $\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma$, és így $\sigma_m = \sigma$.

Lengő terhelésnél $-\infty < v_\sigma < 0{,}5$, ha $\sigma_m > 0$, és $-1 < v_\sigma < 0$, ha $\sigma_m < 0$. Speciálisan tiszta lengő terhelésnél, mivel $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \sigma$, és így $\sigma_m = 0$, ezért $v_\sigma = 0$.

Lüktető terhelésnél $0{,}5 \leq v_\sigma < \infty$. Speciálisan, ha $\sigma_{min} = 0$, akkor $\sigma_m = \sigma_{max}/2$, így $v_\sigma = 0{,}5$, és ha $\sigma_{max} = 0$, akkor $v_\sigma = \infty$.

Az úgynevezett aszimmetriatényezőt a következőképpen definiáljuk:

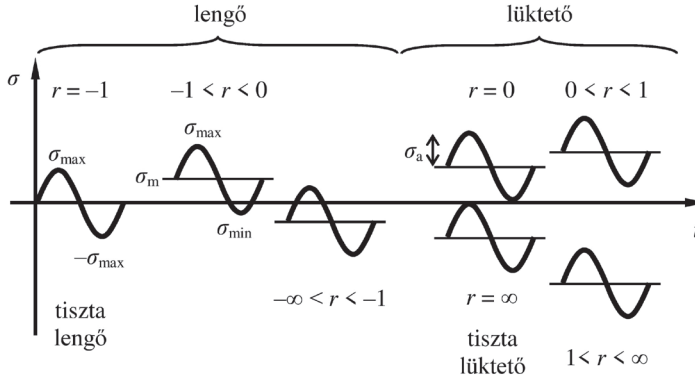
(577) $$r_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

Statikus terhelésnél $r_\sigma = 1$, mivel $\sigma_{max} = \sigma_{min}$.

Lengő terhelésnél $-\infty < r_\sigma < -1$, ha $\sigma_m > 0$, és $-1 < r_\sigma < 0$, ha $\sigma_m < 0$. Speciálisan tiszta lengő terhelésnél, mivel $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, azaz $\sigma_m = 0$, ezért $r_\sigma = -1$.

Lüktető terhelésnél $0 \le r_\sigma < 1$, ha $\sigma_{max} > 0$ és $\sigma_{min} > 0$, és $1 < r_\sigma < \infty$, ha $\sigma_{max} < 0$ és $\sigma_{min} < 0$. Speciálisan, tiszta lüktető terhelésnél, ha $\sigma_{min} = 0$, akkor $r_\sigma = 0$, és ha $\sigma_{max} = 0$, akkor $r_\sigma = \infty$.

Az egyes eseteket grafikusan a 82. ábra foglalja össze.



82. ábra

Az aszimmetriatényezőt a különböző típusú terhelések esetén érvényes határfeszültségek indexéül szokták használni: σ_{-1} például a lengőszilárdságot jelöli, σ_0 a lüktetőszilárdságot. A statikus határfeszültséget ezzel a jelöléssel σ_1-nek kéne jelentenie, de ezt, félreérthetősége miatt, nem szokás használni.

A v és az r arányszám közötti kapcsolat egyszerűen meghatározható:

(578) $$v_\sigma = \frac{\sigma_m}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{min}}{2\sigma_{max}} + \frac{\sigma_{max}}{2\sigma_{max}} = 0{,}5r + 0{,}5$$

Angol kifejezések gyűjteménye

Magyar–angol

befogás	fix support
befogott tartó	fixed beam / cantilever beam
befüggesztett (tartó)	drop-in (beam/segment)
biztonsági tényező	factor of safety
centrifugális másodrendű nyomaték	product of inertia
csavarás, csavarónyomaték	torsion
csukló	pin / hinge
csúszási súrlódás	kinetic friction
csúsztatófeszültség	shear stress
csúsztató rugalmassági tényező	shear modulus
deformáció	strain
dinamikus kihajlás	dynamic buckling
egyenszilárdságú tartó	beam of uniform strength
egykonzolos kéttámaszú tartó	overhanging beam
egyszerű kéttámaszú tartó	simply supported beam
egytengelyű	uniaxial
elfordulás	rotation
eredő erő(rendszer)	resultant
erőpár	couple
fajlagos nyúlás	engineering normal strain, Cauchy strain
ferde hajlítás	oblique bending
feszültség	stress
forgatónyomaték	torque
főfeszültség	principal stress
fő-másodrendű nyomaték	principal moment of inertia
főtengely	principal axis
gördülő súrlódás	rolling resistance

görgő	roller
hajlítás	bending
hajlítónyomatéki ábra	(bending-)moment diagram
helyettesítő erőrendszer	equipollent force system
húzás	tension
inerciasugár	radius of gyration
karcsúság	slenderness
karcsúsági tényező	slenderness ratio
keresztmetszeti tényező	section modulus
kétkonzolos kéttámaszú tartó	double overhanging beam
kifáradás	fatigue
kihajlás	buckling
koncentrált erő	point load
koncentrált forgatónyomaték	ideal / concentrated moment
külpontos	eccentric
lehajlás	displacement
magidom	core of section
másodrendű nyomaték	second moment of area, area moment of inertia
megengedhető feszültség	permissible stress
megnyúlás	elongation
megoszló erőrendszer	distributed load
nyírás	shear
nyíróerőábra	shear force diagram
nyírófeszültség	normal stress
nyomás	compression
nyomóerőábra	axial force diagram
plasztikus kihajlás	plastic buckling
rácsos szerkezet	truss
reakcióerő	reaction
rudak közötti csuklós kapcsolat	hinged connection / internal hinge/pin
rugalmas kihajlás	elastic buckling
rugalmasság	elasticity
rugalmas szál	elastic curve
skalárszorzat	dot product
statikailag határozatlan tartó	statically indeterminate beam
statikailag határozott tartó	statically determinate beam
súrlódás(i erő)	friction (force)

súrlódási szög	angle of friction
szakítódiagram	stress-strain diagram
száraz (Coulomb-) súrlódás	dry friction
támadáspont	point of application
támasz	support
támaszköz	span
tapadási súrlódás	static friction
tartó	beam
tehetetlenségi ellipszis	ellipse of inertia
terhelés	load
többtámaszú tartó	continuous beam
vektoriális szorzat	cross product

Angol–magyar

angle of friction	súrlódási szög
area moment of inertia	másodrendű nyomaték
axial force diagram	nyomóerőábra
beam	tartó
beam of uniform strength	egyenszilárdságú tartó
bending	hajlítás
bending-moment diagram	hajlítónyomatéki ábra
buckling	kihajlás
cantilever beam	befogott tartó
Cauchy strain	fajlagos nyúlás
compression	nyomás
concentrated moment	koncentrált forgatónyomaték
continuous beam	többtámaszú tartó
core of section	magidom
couple	erőpár
cross product	vektoriális szorzat
displacement	lehajlás
distributed load	megoszló erőrendszer
dot product	skalárszorzat
double overhanging beam	kétkonzolos kéttámaszú tartó
drop-in (beam/segment)	befüggesztett (tartó)
dry friction	száraz (Coulomb-) súrlódás

dynamic buckling	dinamikus kihajlás
eccentric	külpontos
elastic curve	rugalmas szál
elastic buckling	rugalmas kihajlás
elasticity	rugalmasság
ellipse of inertia	tehetetlenségi ellipszis
elongation	megnyúlás
engineering normal strain	fajlagos nyúlás
equipollent force system	helyettesítő erőrendszer
factor of safety	biztonsági tényező
fatigue	kifáradás
fix support	befogás
fixed beam	befogott tartó
friction (force)	súrlódási erő
hinge	csukló
hinged connection	rudak közötti csuklós kapcsolat
ideal moment	koncentrált forgatónyomaték
internal hinge/pin	rudak közötti csuklós kapcsolat
kinetic friction	csúszási súrlódás
load	terhelés
moment diagram	hajlítónyomatéki ábra
normal stress	nyírófeszültség
oblique bending	ferde hajlítás
overhanging beam	egykonzolos kéttámaszú tartó
permissible stress	megengedhető feszültség
pin	csukló
plastic buckling	plasztikus kihajlás
point load	koncentrált erő
point of application	támadáspont
principal axis	főtengely
principal moment of inertia	fő-másodrendű nyomaték
principal stress	főfeszültség
product of inertia	centrifugális másodrendű nyomaték
radius of gyration	inerciasugár
reaction	reakcióerő
resultant	eredő erő(rendszer)
roller	görgő
rolling resistance	gördülő súrlódás

rotation	elfordulás
section modulus	keresztmetszeti tényező
second moment of area	másodrendű nyomaték
shear	nyírás
shear force diagram	nyíróerőábra
shear modulus	csúsztató rugalmassági tényező
shear stress	csúsztatófeszültség
simply supported beam	egyszerű kéttámaszú tartó
slenderness	karcsúság
slenderness ratio	karcsúsági tényező
span	támaszköz
static friction	tapadási súrlódás
statically determinate beam	statikailag határozott tartó
statically indeterminate beam	statikailag határozatlan tartó
strain	deformáció
stress	feszültség
stress-strain diagram	szakítódiagram
support	támasz
tension	húzás
torque	forgatónyomaték
torsion	csavarás, csavarónyomaték
truss	rácsos szerkezet
uniaxial	egytengelyű

Vákát oldal

Irodalom

Agárdy Gyula – Lublóy László (2006): *Mechanika I. Statika.* Győr, Széchenyi István Egyetem.

Kósa Csaba (s. a.): *Rugalmas rendszerek mechanikája.* Budapest, Bánki Donát Műszaki Főiskola. Főiskolai jegyzet.

Márton András (1982): *Műszaki mechanika II.* Budapest, Kossuth Lajos Katonai Főiskola. Főiskolai jegyzet.

M. Csizmadia Béla – Nándori Ernő szerk. (1999): *Mechanika mérnököknek. Szilárdságtan.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

Švarc, Vlagyimir Vlagyiszlavovics (1989): *Képes műszaki kisszótár.* Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

Ludovika Egyetemi Kiadó Nonprofit Kft.
Székhely: 1089 Budapest, Orczy út 1.
Kapcsolat: info@ludovika.hu

A kiadásért felel: Koltányi Gergely ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Karácsony Fanni
Olvasószerkesztő: Szabó Ilse
Tördelőszerkesztő: Fehér Angéla
Nyomdai kivitelezés: Ludovika Egyetemi Kiadó Nonprofit Kft.

DOI: https://doi.org/10.36250/00750

ISBN 978-963-531-014-2 (nyomtatott)
ISBN 978-963-531-015-9 (elektronikus)

Több mint tíz év telt el azóta, hogy a Nemzeti Közszolgálati Egyetemen, pontosabban egyik elődintézményében, a Zrínyi Miklós Nemzetvédelmi Egyetemen egyetemi jegyzet készült a műszaki mechanika témakörében, azon belül is szilárdságtanból.

Ez idő alatt nemcsak az ebben a témakörben tárgyalt jelenségeknek, műszaki megoldásoknak jelentek meg újabb alkalmazási területei, hanem az egyetemi képzésben is több változás történt. Mivel új szakokon új tárgyak oktatása folyik, ezért a változó tantárgyi követelményekhez az oktatási anyagoknak is igazodniuk kell. Ennek a célnak kíván a jegyzet megfelelni, ugyanis célirányosan az NKE Hadtudományi és Honvédtisztképző Karon, a katonai logisztika BSc szakon oktatott Mechanika II. kurzus tananyagának lefedésére készült.

A jegyzet feltételezi a Mechanika I. jegyzet anyagának, illetve a differenciál- és integrálszámításnak az alapvető ismeretét, de a mátrixalgebra szükséges összefüggéseit tárgyalja. A leglényegesebb angol szakkifejezések nemcsak első szövegközi előfordulásukkor jelennek meg, hanem összegyűjtve is megtalálhatók a jegyzet végén.

Dialóg Campus